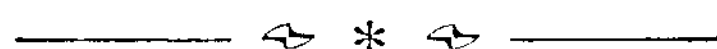
计算数学丛书

奇异摄动中的边界层校正法

苏煜城

上海科学技术出版社

计算数学丛书



奇异摄动中的边界层校正法

苏 煜 城

上海科学技术出版社

计算数学丛书
奇异摄动中的边界层校正法
苏 煜 城
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 江苏溧水印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 8.25 字数 180,000
1983 年 5 月第 1 版 1983 年 5 月第 1 次印刷
印数: 1— 5,000
统一书号: 13119·1068 定价: (科四) 0.78 元

出版说明

《计算数学丛书》是为了适应计算数学和计算机科学的发展，配合高等院校计算数学教学的需要而组织的一套参考读物。读者对象主要是高等院校数学系和计算机科学系的学生、研究生，亦可供高等院校数学系和计算机科学系的教师以及工矿企业、科研单位从事计算工作的技术人员参考。

本丛书向读者介绍近代计算方法的一些主要进展及其适用范围和实用效果。每种书集中介绍一个专题，针对本专题的近代发展作综合性的介绍，内容简明扼要，重点突出，有分析，有评价，力图使读者对该专题的动向和发展趋势得到一个完整的了解。

本丛书已拟定的选题计有：《线性代数与多项式的快速算法》、《数论变换》、《数值有理逼近》、《矩阵特征值问题》、《索伯列夫空间引论》、《计算组合数学》、《样条与插值》、《有限条形法》、《广义逆矩阵及其计算方法》、《非线性方程迭代解法》、《奇异摄动中的边界层校正法》、《沃尔什函数理论与应用》、《多项式最佳逼近的实现》、《坏条件常微分方程数值解》、《误差分析》、《最小二乘问题的数值解法》、《板壳问题非协调方法》、《外推法及其应用》、《Monte Carlo 方法》、《差分格式理论》、《高维偏微分方程数值解》等二十余种，于一九八〇年初起陆续出版。

目　录

引　言

在实际问题中存在大量的含有小参数 ε 的微分方程问题，这类问题的解 u 除与变量 x 有关外，还与小参数 ε 有关，因此 $u=u(x, \varepsilon)$，或表示为 $u=u_\varepsilon(x)$．在这类问题中小参数有的包含在微分方程的低阶导数项中(包括方程的右端)，有的包含在高阶导数项中，还有包含在边界条件和所讨论区域的边界中，由于包含小参数的形式不同，相应定解问题的解 u_ε 也具有不同的性质．这类问题统称为**摄动问题**，我们用 A_ε 来表示它．由于问题 A_ε 与小参数 ε 有关，所以我们讨论的不是单个定解问题，而是一族定解问题．当 $\varepsilon=0$ 时相应地有定解问题 A_0，它的解我们用 u_0 来表示，定解问题 A_0 称为**退化问题**．在一定条件下摄动问题 A_ε 的解 u_ε 可以借助于退化问题 A_0 的解 u_0 作为首项利用摄动方法构造起来，即展开为 ε 的幂级数．例如，设 $L_0, L_1, \cdots, L_s$ 是空间 U 的线性微分算子．我们构造摄动算子

$$L_\varepsilon=L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2 L_2+\cdots+\varepsilon^s L_s, \tag{1}$$

其中 L_0 是 L_ε 的主要部分，$\varepsilon L_1+\varepsilon^2 L_2+\cdots+\varepsilon^s L_s$ 是它的摄动部分，$\varepsilon>0$ 是小参数．

摄动问题 A_ε：在 n 维空间的有界区域 $Q+\Gamma$ 内求方程

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=h(x),\ x=(x_1, \cdots, x_n)\in Q \tag{2}$$

在一定边界条件下的解，Γ 是区域 Q 的边界．

退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$：在 $Q+\Gamma$ 内求方程

$$L_0u_0=h(x),\ x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in Q \tag{3}$$

在一定边界条件下的解.

现在来讲一下用一般摄动方法构造问题 A_ε 级数解的过程. 假定此解有以下展开式:

$$u_\varepsilon(x)=u_0(x)+\varepsilon u_1(x)+\cdots+\varepsilon^n u_n(x)+\cdots, \tag{4}$$

这是关于 ε 的幂级数. 为了确定级数(4)中的系数 $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\cdots$, $u_n(x)$, $\cdots$, 将此级数代入方程(2), 合并 ε 的同幂项, 并令其系数为零, 则得到一组递推方程:

$$\begin{aligned} &L_0u_0=h,\\ &L_0u_1=-L_1u_0,\\ &L_0u_2=-L_1u_1-L_2u_0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{5}$$

其中第一个方程就是退化方程(3), 其余方程和第一个方程的差别只在于右端项. 将级数(4)再代入给定的边界条件, 可以得到 u_i 应满足的边界条件. 在相应边界条件下逐次解方程(5)即可求得展开式(4)的系数 u_i(当然, 这些方程在相应边界条件下必须满足可解条件). 最后, 还需研究级数(4)的收敛性, 或者取其有限项之和, 估计其余项. 在摄动方法中级数(4)一般是 ε 的渐近级数, 即对于任意正整数 N 有

$$u_\varepsilon(x)=u_0(x)+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i u_i(x)+R_N(x,\ \varepsilon), \tag{6}$$

其中 $R_N(x,\ \varepsilon)$ 是余项:

$$R_N(x,\ \varepsilon)=O(\varepsilon^{N+1})\ (\varepsilon\to 0). \tag{7}$$

幂级数(4)称为 u_ε 的渐近展开式, 简称为问题 A_ε 的渐近解.

应指出, 收敛级数是渐近级数, 而渐近级数一般是发散的, 但它的前有限项之和在一定精度范围内可用来近似表示摄动问题的真解, 因此摄动方法是一种近似方法.

若渐近展开式(4)在 $Q+\Gamma$ 内一致有效成立，即余项 $R_N(x,\ \varepsilon)$在 $Q+\Gamma$ 内关于 x 一致满足(7)，则称展开式(4)为 $u_\varepsilon(x)$在 $Q+\Gamma$ 内的**一致有效渐近展开式**. 此时摄动问题称为**正则摄动问题**，处理这类问题的摄动方法称为**正则摄动方法**.

因此，正则摄动问题的解 $u_\varepsilon(x)$可以利用正则摄动方法借助于退化问题的解 $u_0(x)$表示成关于小参数 ε 的一致有效渐近展开式，但不是所有摄动问题的解都能用正则摄动方法求得它的一致有效渐近展开式. 若摄动问题的解 $u_\varepsilon(x)$当 $\varepsilon\to 0$ 时不存在关于变量 x 一致收敛的极限，则称摄动问题为**奇异摄动问题**，处理奇异摄动问题的方法称为**奇异摄动方法**，如果用正则摄动方法去解奇异摄动问题是一定要失败的.

下面我们列举一些例题来阐明奇异摄动问题解的性质.

例 1 摄动问题 A_ε: 在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内求下面初值问题的解:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv u''+(1+\varepsilon)u=0, \tag{8}$$

$$u(0)=0,\ u'(0)=1. \tag{9}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0: 在区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内求下面初值问题的解:

$$L_0u_0\equiv u_0''+u_0=0, \tag{10}$$

$$u_0(0)=0,\ u_0'(0)=1. \tag{11}$$

退化问题 A_0 的解是: $u_0(x)=\sin x$.

我们可以形式上来构造摄动问题 A_ε 的解 u_ε 的幂级数展开式:

$$\tilde{u}_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j u_j(x). \tag{12}$$

将它代入方程(8)和初始条件(9)，令 ε 的同幂项系数为零，则

得到确定函数 $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\cdots$ 的递推方程和初始条件:

$$u_0''+u_0=0,\ u_0(0)=0,\ u_0'(0)=1. \tag{13}$$

$$u_j''+u_j=-u_{j-1},\ u_j(0)=u_j'(0)=0\quad(j\geqslant1). \tag{14_j}$$

初值问题 (13) 就是退化问题 A_0, 逐次解问题 (14_j) 即求得函数$u_j(x)$ $(j\geqslant1)$. 当 $j=1$ 时,

$$u_1(x)=\frac{1}{2}(x\cos x-\sin x). \tag{15}$$

摄动问题(8), (9)的精确解是:

$$u_\varepsilon(x)=(1+\varepsilon)^{-1/2}\sin((1+\varepsilon)^{1/2}x). \tag{16}$$

为了同 $\tilde{u}_\varepsilon(x)$的部分和进行比较, 对于充分小的 ε 我们展开 $(1+\varepsilon)^{1/2}$:

$$(1+\varepsilon)^{1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k\varepsilon^k=1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2+\cdots,$$

并利用中值定理, 当 $\varepsilon\to0$, $\varepsilon^{N+1}x=O(1)$时我们有

$$u_\varepsilon(x)=\left(\sum_{k=0}^{N}c_k\varepsilon^k\right)^{-1}\sin\left(\left(\sum_{k=0}^{N}c_k\varepsilon^k\right)x\right)+O(\varepsilon^{N+1}).$$

再利用 Taylor 展开式, 上式可写为

$$u_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j u_j(x)+O(\varepsilon^{N+1}), \tag{17}$$

其中 x 只限于: $\varepsilon^{N+1}x=O(1)$ $(\varepsilon\to0)$, 特别是, x 只在有限区间内变化, 函数 $u_j(x)$就是我们逐次解问题(13)和(14_j) $(j\geqslant1)$得到的函数.

如果 x 充分大以致 $\frac{1}{x}=O(\varepsilon^{N+1})$, 则展开式(17)不再成立. 因此, 如果我们讨论的摄动问题是在有限区间内, 那末它是正则摄动问题; 如果所讨论的区间是$[0,\infty)$, 那末初值问题(8), (9)不能用正则摄动方法求解, 因为表达式(17)最终不再成立. 实际上, 从 $u_1(x)$的表达式(15)可以看到, 当 $x\to$

$+\infty$ 时 $u_1(x)$不能保持有界，表达式(17)成立的一致性已不存在．在此情况下摄动问题(8)，(9)是奇异摄动问题．

例 2 摄动问题 A_ε: 在 $0\leqslant x<+\infty$ 内解边值问题:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv u''-\varepsilon^2 u=0, \tag{18}$$

$$u(0)=1,\ u(\infty)=0. \tag{19}$$

此问题有解

$$u_\varepsilon(x)=e^{-\varepsilon x}, \tag{20}$$

并且

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x)=\begin{cases} 1 & (\varepsilon x=o(1)), \\ e^{-c} & (\varepsilon x=c+o(1),\ c\text{——任意常数}), \\ 0 & (\varepsilon x\to+\infty). \end{cases} \tag{21}$$

对于有限的 x 显然有 $u_\varepsilon\to 1(\varepsilon\to 0)$，但对于 $x\geqslant 0$ 不存在一致收敛的极限．因此摄动问题(18)，(19)是奇异摄动问题．此外，与其相应的退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$:

$$L_0u_0\equiv u_0''=0,$$

$$u_0(0)=1,\ u_0(\infty)=0$$

无解．

例 3 摄动问题 A_ε: 在 $0\leqslant x<+\infty$ 内解初值问题:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv \varepsilon u'+u=1, \tag{22}$$

$$u(0)=0. \tag{23}$$

在此问题中小参数 ε 含于方程(22)的高阶导数项中．与问题 A_ε 相应的退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$是:

$$L_0u_0\equiv u_0=1. \tag{24}$$

退化问题的解 $u_0(x)=1$ 不满足初始条件(23)．因此摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0 时摄动方程(22)降低一阶，失去初始条件(23)．

摄动问题(22)，(23)的精确解为:

$$u_\varepsilon(x)=1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\quad(x\geqslant 0),\tag{25}$$

由此可知

$$u_\varepsilon(x)-1=u_\varepsilon(x)-u_0(x)=-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.\tag{26}$$

当 $x\gg\varepsilon$ 时，函数 $-e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ 随 $\varepsilon\to 0$ 而趋近于零，但在 $x=0$ 附近它并不是一个微小的量．因此当 $\varepsilon\to 0$ 时 $u_\varepsilon(x)$ 的非一致收敛性是很明显的，它有间断极限函数，$\varepsilon=0$ 是它的奇点．如果我们将(25)理解为 $u_\varepsilon(x)$ 的级数展开式(只有一项)，那末(25)的第二项是余项，应在所讨论的区间内处处为 $O(\varepsilon)$的量．但根据刚才的分析，它在整个区间 $0\leqslant x<+\infty$ 内不都是一个微小的量，因此我们不能在整个区间内以 $u_0(x)$ 近似表示 $u_\varepsilon(x)$．按所给定义，摄动问题(22)，(23)属于奇异摄动问题．

例 4 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内解两点边值问题：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon u''+u'=0,\tag{27}$$

$$u(0)=\alpha_0,\ u(1)=\beta_0.\tag{28}$$

小参数 ε 也是包含在微分方程的高阶导数项中，当 $\varepsilon=0$ 时摄动方程(27)退化为方程

$$L_0u_0\equiv u_0'=0.\tag{29}$$

这是一阶常微分方程，只需一个定解条件即可．我们假定保留第二个边界条件，即

$$u_0(1)=\beta_0.\tag{30}$$

因此当 $\varepsilon=0$ 时摄动方程(27)降低一阶，失去一个边界条件：$u(0)=\alpha_0$.

摄动问题(27)，(28)的解可精确地求得：

$$u_\varepsilon(x)=(1-e^{-1/\varepsilon})^{-1}\{(\alpha_0-\beta_0)e^{-x/\varepsilon}-\beta_0-\alpha_0e^{-1/\varepsilon}\}.\tag{31}$$

显然，退化问题的解为：

$$u_0(x)=\beta_0,\tag{32}$$

它不满足第一个边界条件，除非 $\alpha_0=\beta_0$.

由表达式(31)我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x)=\beta_0 \quad (0<x\leqslant 1). \tag{33}$$

此极限在区间$(0<x\leqslant 1)$的任何一个闭子区间 $0<\delta\leqslant x\leqslant 1$ 上一致成立，但在整个区间$(0<x\leqslant 1)$内却不是这样. 事实上，表达式(31)可改写为

$$u_\varepsilon(x)=\beta_0+\frac{\alpha_0-\beta_0}{1-e^{-1/\varepsilon}}(e^{-x/\varepsilon}-e^{-1/\varepsilon}). \tag{31'}$$

由此式可知，当 $x\gg\varepsilon$ 时 $u_\varepsilon(x)$ 随 $\varepsilon\to 0$ 而趋近于 β_0(退化问题的解!)，但在 $x=0$ 附近(31′)右端的第二项却不是一个微小的量. 同样，如果我们将(31′)理解为 $u_\varepsilon(x)$ 的级数展开式，那末(31′)的第二项当 $\varepsilon\to 0$ 时在整个区间$[0,1]$内应为 $O(\varepsilon)$ 的量，但根据刚才的分析，这是不可能的. 因此我们不能以退化问题的解 $u_0(x)$ 在整个区间$(0\leqslant x\leqslant 1)$内作为 $u_\varepsilon(x)$ 的近似. $u_\varepsilon(x)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时有间断极限函数，$\varepsilon=0$ 是它的奇点. 摄动问题(27)，(28)是奇异摄动问题.

例 5 在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内解边值问题:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon u''+u'+u=0, \tag{34}$$

$$u(0)=\alpha(\varepsilon),\ u(1)=\beta(\varepsilon). \tag{35}$$

在此问题中小参数 ε 不但含于微分方程，而且包含在边界条件内.

我们假定，$\alpha(\varepsilon)$ 和 $\beta(\varepsilon)$ 对于任意正整数 N 可展为:

$$\alpha(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\alpha_j+O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (\varepsilon\to 0), \tag{36}$$

$$\beta(\varepsilon)=\sum_{j=0}^{N}\varepsilon^j\beta_j+O(\varepsilon^{N+1}) \qquad (\varepsilon\to 0). \tag{37}$$

摄动问题(34)，(35)的精确解为:

$$u_\varepsilon(x)=\left(\frac{\beta-\alpha e^{\rho_2}}{e^{\rho_1}-e^{\rho_2}}\right)e^{\rho_1 x}+\left(\frac{\alpha e^{\rho_1}-\beta}{e^{\rho_1}-e^{\rho_2}}\right)e^{\rho_2 x}, \tag{38}$$

其中 $\rho_1=\rho_1(\varepsilon)$，$\rho_2=\rho_2(\varepsilon)$是特征方程

$$\varepsilon\rho^2+\rho+1=0$$

的两个根，它们有如下的渐近式：

$$\begin{aligned}\rho_1(\varepsilon)&=\frac{1}{2\varepsilon}(-1+(1-4\varepsilon)^{1/2})=-1+O(\varepsilon),\\ \rho_2(\varepsilon)&=\frac{1}{2\varepsilon}(-1-(1-4\varepsilon)^{1/2})=-\varepsilon^{-1}+1+O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{39}$$

由(39)可知，当 $\varepsilon\to0$ 时 $\rho_1\to-1$，$\rho_2\to-\infty$. 利用展开式(36)和(37)可将表达式(38)写为

$$u_\varepsilon(x)=\beta_0e^{1-x}+(\alpha_0-\beta_0e)e^xe^{-x/\varepsilon}+O(\varepsilon). \tag{40}$$

此式对于充分小的 ε 在区间 $0\leqslant x\leqslant1$ 内处处成立. 在(40)中函数 $e^{-x/\varepsilon}$ 有如下的估计：

$$e^{-x/\varepsilon}=O(\varepsilon^N)\quad(x>0,\ \varepsilon\to0), \tag{41}$$

其中 N 是任意正整数. 因此 $u_\varepsilon(x)$在 $0\leqslant x\leqslant1$ 内当 $\varepsilon\to0$ 时的非一致收敛性明显地表现出来，对于区间 $0<x\leqslant1$ 内任意一个闭子区间 $0<\delta\leqslant x\leqslant1$ 下面渐近展开式一致成立：

$$u_\varepsilon(x)=\beta_0e^{1-x}+O(\varepsilon). \tag{42}$$

在 $x=0$ 附近表达式(40)中的第二项当 $\varepsilon\to0$ 时不是一个微小的量，其中第一项 β_0e^{1-x} 是退化问题($\varepsilon=0$)

$$\begin{aligned}&L_0u_0\equiv u_0'+u_0=0,\\ &u_0(1)=\beta_0\end{aligned} \tag{43}$$

的解，但它不满足条件 $u_0(0)=\alpha_0$(除非 $\alpha_0=\beta_0e$)，我们不能在整个区间内以 β_0e^{1-x} 作为 $u_\varepsilon(x)$的近似，因此摄动问题(34)，(35)是奇异摄动问题.

例 6 在单位圆 $Q:0\leqslant\rho\leqslant1$ 内解椭圆型方程第一边值问题：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 \Delta u - u = h(x, y),$$
$$u|_{\rho=1} = 0, \tag{44}$$

其中 Δ 是二维 Laplace 算子．与摄动问题(44)相应的退化问题是：

$$L_0 u_0 \equiv -u_0 = h(x, y). \tag{45}$$

由于右端函数 $h(x, y)$ 是任意给定的，一般地不满足边界条件 $u|_{\rho=1}=0$．因此摄动问题(44)当 $\varepsilon=0$ 退化为问题(45)时边界条件完全失去，它的解 $u_\varepsilon(x, y)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时在整个圆内不存在一致收敛的极限．事实上，

$$u_\varepsilon = -h(\rho, \varphi) + \psi(\rho) h(1, \varphi) e^{-\frac{1-\rho}{\varepsilon}} + O(\varepsilon), \tag{46}$$

其中 (ρ, φ) 是极坐标，$\psi(\rho)$ 是平滑函数(将在正文中给予定义)．表达式(46)对于充分小 ε 在整个圆 $0\leqslant\rho\leqslant 1$ 内处处成立，但下面渐近式

$$u_\varepsilon = -h(\rho, \varphi) + O(\varepsilon) \tag{47}$$

只在圆 $0\leqslant\rho<1$ 内的闭子区域 $0\leqslant\rho\leqslant\gamma<1$ 上一致成立，因此摄动问题(44)也是奇异摄动问题．

以上我们列举了六个奇异摄动的例题，它们的共同特性是，这些问题的解 u_ε 作为 ε 的函数，当 $\varepsilon\to 0$ 时在所讨论的区域内出现了非一致收敛性，具有间断的极限函数，$\varepsilon=0$ 是 u_ε 的奇点．但这些问题之所以产生非一致收敛性的原因是不同的，在例 1 和例 2 中是由于所讨论的区间是半无界区间而产生，在后面四个例题中是由于小参数 ε 含于微分方程的高阶导数项，当 $\varepsilon=0$ 时摄动方程降阶，在边界的一部分，或者在全部边界上失去边界条件而产生．后者按 Prandtl[6] 边界层理论属于边界层型奇异摄动问题，出现非一致收敛性的边界附近称为边界层．

本书主要研究小参数在高阶导数项的微分方程奇异摄动问题，特别是偏微分方程奇异摄动问题．这些问题常产生于流体力学、弹性力学、量子力学、声学、光学、化学反应和最优控制等许多重要领域．在 Friedrichs 文章[7]中详细阐述了数学物理中常出现的这类问题．关于化学反应和最优控制方面 O'Malley 在他的书[8]中作了很好的介绍．

奇异摄动理论和方法的研究自 1935 年以来先后相继在苏联、美国和其它国家蓬勃发展起来，成为应用数学的一个重要领域．处理奇异摄动问题的方法主要是渐近方法，关于渐近展开的基本知识，我们把它写在书末的附录中，供读者参考．近几十年来处理奇异摄动问题的渐近方法有了很大发展，其中关于小参数在高阶导数项的奇异摄动问题(边界层问题)主要有 Люстерник–Вишик 渐近方法(亦称边界层校正法 the method of boundary layer correction)和匹配渐近展开法(the method of matched asymptotic expansions，简称为匹配法)．近年来还有多重尺度法．匹配法亦称为外展开和内展开方法．关于匹配法读者可参看 Van Dyke[9] 和 Eckhaus[10] 专著，这些作者在自己的专著中对该方法的实践和理论性的研究作了详细的介绍．关于多重尺度法请参看 Nayfeh[11] 专著．

在本书中我们主要介绍 Люстерник–Вишик 方法．该方法是由 Люстерник 和 Вишик[1~5] 创建的，它是以 Prandtl[6] 的正则化伸长和边界层校正这两个思想为基础的．Люстерник 和 Вишик 不但创建了构造渐近解的方法，而且建立了严格的数学理论基础，对奇异摄动理论的发展产生了重大的影响．现在扼要地叙述一下 Люстерник–Вишик 方法的实质．

假定 Q 是 n 维空间的有限区域，Γ 是其边界．现考虑摄

动问题 A_ε: 在 Q 内求函数 $u_\varepsilon=u_\varepsilon(x)$ 满足方程

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=h(x),\ x=(x_1,\ \cdots,\ x_n)\in Q, \tag{48}$$

在边界 Γ 上满足一定边界条件 $\mathscr{B}$, 其中 L_ε 是依赖于小参数 $\varepsilon(\varepsilon>0)$ 的线性微分算子:

$$L_\varepsilon=L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2L_2+\cdots+\varepsilon^sL_s=L_0+\varepsilon L_{1\varepsilon}, \tag{49}$$

并且 L_ε 的阶数高于算子 L_0 的阶数. 当 $\varepsilon=0$ 时摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0: 在相应边界条件 $\mathscr{B}_0$ 下求方程(阶数比方程(48)低)

$$L_0w_0=h(x),\ x\in Q \tag{50}$$

的解, 其中边界条件 $\mathscr{B}_0$ 是边界条件 $\mathscr{B}=\mathscr{B}_0+\mathscr{B}_1$ 的一部分. 一般地说, 退化问题 A_0 的解 w_0 不满足边界条件 $\mathscr{B}_1$. 因此当摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0 时方程降阶, 失去边界条件 $\mathscr{B}_1$ (参看前面的例题). 在此情况下摄动问题 A_ε 的解 $u_\varepsilon(x)$, 作为 ε 的函数, 在失去边界条件的那一部分边界(或者全部边界)附近当 $\varepsilon\to0$ 时要出现非一致收敛性, 它的极限函数是间断的, 正如我们在前面所述的, $\varepsilon=0$ 是 $u_\varepsilon(x)$ 的奇点, 它的物理意义是: 在失去边界条件的边界附近将产生边界层现象. 我们所举的六个例题中, 后面四个例题都是小参数在高阶导数项的微分方程奇异摄动问题, 它们都具有刚才所述的性质. 如果用一般的渐近方法(正则摄动法)解这些问题, 正如前面例题所表明的将导致错误结果. Люстерник 和 Вишик 提出以下方法构造摄动问题(48)的渐近解:

先在区域 Q 的内部根据算子 L_ε 的原来的分解(49)(称为第一次分解)构造 u_ε 为以下形式:

$$w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^nw_n+\cdots, \tag{51}$$

要求它满足方程(48):

$$L_\varepsilon(w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^nw_n+\cdots)=h(x) \tag{52}$$

和边界条件 $\mathscr{B}_0$. 由此得到一组递推方程，在相应的边界条件下用以确定函数 w_i. 这一过程 Люстерник 和 Вишик 称为**第一迭代过程**. 其次，由于这类问题的解 u_ε 在失去边界条件的那一部分边界附近沿法线方向变化得特别快，为了消除 u_ε 在 $\varepsilon=0$ 的奇异性，Люстерник 和 Вишик 在上述边界附近（我们用 Γ_δ 表示它）引进局部坐标(ρ, φ)，ρ 是边界 Γ 的内法线，$\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$是边界 Γ 上的任意一点，再沿法线方向引入新变量 $t=\rho/\varepsilon$ 将坐标尺度伸长，放大边界层，使 u_ε 随 t 的变化"放慢"变化速度，这样就导致了算子 L_ε 的第二次分解:

$$L_\varepsilon=\varepsilon^{-k}[M_0+\varepsilon M_1+\cdots]. \tag{53}$$

在 Γ_δ 内构造 u_ε 为以下形式:

$$\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^N v_N+\cdots). \tag{54}$$

要求它满足齐次方程

$$L_\varepsilon[\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\cdots)]=0, \tag{55}$$

并要求它与 $\sum \varepsilon^i w_i$ 之和满足所有边界条件 $\mathscr{B}$. 由此可得到确定函数 v_i 的递推过程，Люстерник 和 Вишик 称此过程为**第二迭代过程**. 如此构造的函数 v_i 按 Люстерник 和 Вишик 的要求应为边界层型的函数，即形如

$$P\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right)\exp\left(\frac{-\lambda(\varphi)\rho}{\varepsilon}\right) \tag{56}$$

的函数，其中 $P\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right)$是 ρ/ε 的多项式（边界层函数的严格定义在第一章）. 由于方程是线性的，所以摄动问题(48)的解 u_ε 的渐近展开式可有以下形式:

$$u_\varepsilon=\sum \varepsilon^i w_i+\sum \varepsilon^i v_i. \tag{57}$$

因此用 Люстерник–Вишик 方法构造的渐近式有两个和式，第一个和式是在区域 Q 内部构造的，第二个和式是在失去边界

条件的那一部分边界附近 Γ_δ 内构造的. **第二个和式称为边界层校正项**, 它是用来补足第一个和式, 使得失去的边界条件得到满足, 以校正精确解 u_ε 与第一个和式的误差. 例 3 中的函数 $-e^{-x/\varepsilon}$, 例 4 中的函数 $\frac{\alpha_0-\beta_0}{1-e^{-1/\varepsilon}}e^{-x/\varepsilon}$ 以及例 5 中的 $(\alpha_0-\beta_0 e)e^x e^{-x/\varepsilon}$ 都是边界层型函数. 这些函数的主要特点是它只在边界附近有明显的影响, 而在远离边界处却是一个可以忽略的量, 它在构造奇异摄动问题解的渐近展开式中起着校正作用, 使我们最终能得到在 $Q+\Gamma$ 内一致有效的渐近展开式.

Люстерник–Вишик 方法主要用于偏微分方程奇异摄动问题, 它的一个重要优点是在算子 L_ε 的第二次分解(53)中, 它的主要部分 M_0 关于变量 t 是一个常系数的常微分算子(只要区域 Q 的边界不包含退化算子 L_0 的特征部分), 因此为了确定函数 v_i 只需在一定的边界条件下解常微分方程即可. 当然, 为了使函数 v_i 具有边界层性质, 还需给予一定条件. Люстерник 和 Вишик 在他们的工作中提出"正则退化"的概念和保证正则退化的条件, 这里有代数条件(见第一章 § 5)和分析条件(见第一章 § 4). 他们还研究了正则退化和摄动问题、退化问题可解性之间的关系, 从而分出范围相当广泛的具有边界层现象的偏微分方程奇异摄动问题. 他们还研究了退化算子具有零特征值的情形(Люстерник 和 Вишик 称为谱上问题), 边界条件和方程右端振动很快的情形, 大系数问题, 初始跳跃 Cauchy 问题以及特征值和特征函数的摄动问题. 他们以相应问题的解 u_ε 在 $\varepsilon=0$ 有奇性(代数的或分析的, 或者既有代数的又有分析的)这个统一观点用他们所创建的方法解决了这些问题. 他们也研究了非线性问题[4]. 本书由于

篇幅所限,不可能将这些重要研究工作全部收入书内,只介绍边界层问题和谱上问题,这是 Люстерник 和 Вишик 工作中最基本的内容.

由于 Люстерник-Вишик 方法比较简单,又有严格的理论基础,因此它的适用范围比较广泛,在许多实际问题中是一个行之有效的方法.

在我国,早在 1948 年钱伟长就已开始利用奇异摄动方法研究边界层问题,把它应用到弹性圆薄板大挠度问题[13].当时虽未用奇异摄动这个词,但其内容与现代奇异摄动理论是一样的.所以说,这个工作是我国用奇异摄动方法研究边界层问题的较早文献之一.1979 年在上海召开了奇异摄动理论讨论会,我国力学工作者和数学工作者提出了许多篇学术报告,这将大大促进我国奇异摄动理论和方法的发展.

作者在前面已指出,本书主要介绍 Люстерник-Вишик 方法并用它讨论小参数在高阶导数项的偏微分方程奇异摄动问题.关于常微分方程和常微分方程组的奇异摄动问题,近十多年来出版了不少专著.例如,Wasow[14],Nayfeh[11],O'Malley[8]以及 Васильева,Бутузов[15]等著作,这些作者在不同方面作了系统的综合介绍.

本书共分六章.第一章讨论常微分方程奇异摄动问题,介绍 Люстерник-Вишик 方法构造渐近解的基本过程,正则退化概念,保证正则退化的充分条件,并研究了摄动问题、退化问题和正则退化之间的关系以及余项估计.所有这些讨论都是为讨论偏微分方程奇异摄动问题作的准备.第二章研究偏微分方程奇异摄动问题渐近解的构造和余项估计,主要讨论小参数在高阶导数项的椭圆型方程边值问题,还讨论了单一特征线方程,单一特征线方程和椭圆型方程的相互退化,并

列举了一些特殊类型边界层的构造．第三章讨论线代数方程组的摄动问题，主要讨论退化方程组的系数行列式等于零的情形，还研究了矩阵特征值和特征向量的摄动问题．这一章所讲的内容有它的独立意义，但也是为研究偏微分方程的谱上问题提供思想和方法．第四章讨论未提高微分算子阶数的摄动问题，在此问题中微分方程摄动项的阶数不高于非摄动项，但非摄动项的微分算子有零特征值，在此情况下退化问题未必可解，利用第三章的方法构造了这类问题的渐近解．第五章研究偏微分方程奇异摄动问题，主要讨论退化问题有零特征值情形，即谱上问题，利用第二章和第三章的方法构造了渐近解，并对余项作出估计．第六章讨论线性椭圆型微分算子特征值和特征函数的摄动问题．最后，在附录中介绍了渐近展开的基本知识．

我们要求读者已具备数学分析、线性代数、微分方程和泛函分析（包括 Соболев 空间）等知识．初学者可先读引言、第一章和第二章这三个部分．

第 1 章

常微分方程奇异摄动问题

§1 线性变系数常微分方程初值问题

1-1 微分方程问题 在区间 [0, 1] 内讨论线性变系数常微分方程初值问题 A_ε:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv L_k u + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(x) \frac{d^{k+r}u}{dx^{k+r}} = h(x), \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=0} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \cdots, k-1, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{d^{k+r} u}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} = 0, \quad r = 0, 1, 2, \cdots, l-1, \tag{1.3}$$

其中

$$L_k u \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j(x) \frac{d^j u}{dx^j}, \quad a_k(x) \neq 0, \tag{1.4}$$

$\varepsilon > 0$ 是小参数. 当 $\varepsilon = 0$ 时方程(1.1)退化为低阶的微分方程

$$L_k w \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j(x) \frac{d^j w}{dx^j} = h(x). \tag{1.5}$$

方程(1.5)连同初始条件(1.2)的初值问题，我们称它为摄动问题 A_ε 的**退化问题** $A_0(\varepsilon = 0)$. 方程(1.5)称为方程(1.1)的**退化方程**. 因此当 $\varepsilon = 0$ 摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0 时微分方程的阶数降低 l 阶, 失去 l 个初始条件.

我们主要研究问题(1.1), (1.2), (1.3)的解 $u_\varepsilon(x)$ 当 $\varepsilon \to 0$ 时的渐近性态, 它与退化问题(1.5), (1.2)解之间的关

系以及如何来构造 $u_\varepsilon(x)$ 的渐近展开式，亦即问题(1.1)，(1.2)，(1.3)的渐近解. 为此，我们作如下一些假定：

1) 设方程 (1.1) 的系数 $a_j(x)$ $(j=0, 1, \cdots, k+l)$ 及右端 $h(x)$ 都是充分光滑的函数；

2) 退化问题是可解的，即初值问题(1.5)，(1.2)有唯一解；

3) 摄动问题 A_ε 关于 ε 是一致可解的，即算子 L_ε 有逆算子 L_ε^{-1} 存在并且此逆算子按某种范数关于 ε 是一致有界的.

1-2 边界层函数 我们在引言中曾经指出，形如 $e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ $(x>0)$ 的函数在 $x=0$ 的邻域内构造奇异摄动问题渐近解的重要性，它正确地刻划了奇异摄动问题解 u_ε 当 $\varepsilon\to0$ 时的渐近性态，它和退化问题的解相加以后，可以补足所失去的定解条件. 从它的表达式可以看到，它只在 $x=0$ 附近产生影响，当远离 $x=0$ 的邻域，即 $x\gg\varepsilon$ 时，这一函数当 $\varepsilon\to0$ 时趋近于零(见图 1). 具有这些性质的函数，按 Л. А. Люстерник, М. И. Вишик 称它为边界层函数.

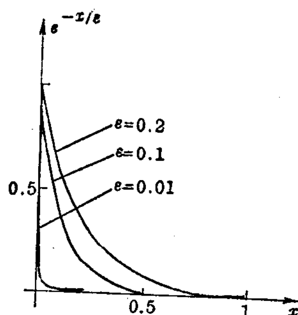


图 1

现给出边界层函数的严格数学定义：设 Q 是 n 维空间的区域，Γ 是其边界. 设函数 $v_\varepsilon(x_1, x_2, \cdots, x_n)=v_\varepsilon(x)$ 是定义在 Q 内，p 次可微并且依赖于小参数 $\varepsilon(\varepsilon>0)$ 的函数. 若函数 $v_\varepsilon(x)$ 满足下列条件，则称它为 $k(k<p)$ 阶边界层类型函数：

1) 函数 $v_\varepsilon(x)$ 及其直到 $p(p>k)$ 阶为止的导数在 Q 内任意一个不包含 Γ 的封闭子区域内当 $\varepsilon\to0$ 时一致趋近于零；

2) 函数 $v_\varepsilon(x)$ 的 k 阶导数当 $\varepsilon\to 0$ 时在 $\bar{Q}$ 内有界，而 $k+1$ 阶导数及其更高阶导数当 $\varepsilon\to 0$ 时在一定范数意义下趋近于 ∞；

3) 函数 $v_\varepsilon(x)$ 的 $j(j<k)$ 阶导数在 $\bar{Q}$ 上当 $\varepsilon\to 0$ 时趋近于零.

对于一维情形，在正半轴($x>0$)上靠近点 $x=0$ 的典型的 k 阶边界层函数有

$$\varepsilon^k e^{-\frac{\lambda x}{\varepsilon}}, \varepsilon^k P\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-\frac{\lambda x}{\varepsilon}},$$

其中 $\lambda>0(\mathrm{Re}\lambda>\lambda_0>0)$，$P(\xi)$是 ξ 的多项式，或者一般地是 ξ 的函数，此函数连同它的 p 阶导数当 $\xi\to\infty$ 时其增长不超过幂函数的增长.

对于 n 维情形，我们设 Q 是具有光滑边界 Γ 的有界区域，$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})$ 是边界 Γ 上点的坐标，在 Γ 的 $h(h>0)$ 邻域 Γ_h 内引进局部坐标(ρ, φ)，其中 ρ 是长度为 h 的 Γ 法线上的点到 Γ 上点的距离. 例如 C 是 Γ 上的一点，B 是 Γ_h 内法线上的一点，$\rho(B)$即点 B 沿法线 CB 到 Γ 的距离，$\rho(B)\leqslant h$；我们选取 h 使得 Γ 的法线段互不相交. 在 Γ_h 内典型的 k 阶边界层函数有

$$\varepsilon^k \exp\left(-\frac{\lambda(\varphi)\rho}{\varepsilon}\right), \ \varepsilon^k P\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \ \varphi\right)\exp\left(-\frac{\lambda(\varphi)\rho}{\varepsilon}\right),$$

其中 $P(\xi, \varphi)$是 ξ 的多项式，其系数依赖于 φ，或者一般地是 ξ 的函数，此函数关于 ξ 的导数当 $\xi\to\infty$ 时其增长不超过幂函数的增长，$\lambda=\lambda(\varphi)$有有界导数，并且 $\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0>0$.

1-3 基本迭代过程 摄动问题 (1.1), (1.2), (1.3) 当 $\varepsilon=0$ 时退化为低阶的微分方程初值问题(1.5), (1.2)，方程阶数降低 l 阶，失去 l 个初始条件，一般地说，退化问题的解不

能满足失去的 l 个初始条件，在 $x=0$ 附近摄动问题的解 $u_\varepsilon(x)$ 变化很快，当 $\varepsilon\to 0$ 时 $u_\varepsilon(x)$ 不能一致逼近于退化问题的解，与退化问题的解可能相差很大．此时 $u_\varepsilon(x)$ 已不是 ε 的解析函数，$\varepsilon=0$ 是它的奇点．在 $x=0$ 附近产生边界层现象，$x=0$ 的邻域是边界层区域．按引言中的分类，这样的摄动问题属于奇异摄动问题． 正如我们在引言中所指出的，如用正则摄动方法，是不能得到这类问题渐近解的，必须求助于奇异摄动方法．

现用 Люстерник-Вишик 方法来构造问题(1.1)，(1.2)，(1.3)的渐近解．

先利用算子 L_ε 的原来分解，即方程(1.1)左端的形式(称为第一次分解)构造问题 A_ε 的解为以下形式：

$$w_\varepsilon(x)=w_0(x)+\varepsilon w_1(x)+\cdots+\varepsilon^n w_n(x)+\cdots, \qquad (1.6)$$

要求它满足方程(1.1)：

$$L_\varepsilon w_\varepsilon(x)=L_\varepsilon(w_0(x)+\varepsilon w_1(x)+\cdots+\varepsilon^n w_n(x)+\cdots)=h(x) \qquad (1.7)$$

和初始条件(1.2)，然后在 $x=0$ 邻域内引进伸长变换 $t=x/\varepsilon$，将 $x=0$ 的邻域拉宽，对算子 L_ε 可作一新的分解(称为第二次分解)．在此邻域内构造问题 A_ε 的解为以下形式：

$$v_\varepsilon(x)=\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^n v_n+\cdots) \qquad (1.8)$$

要求它满足齐次方程：

$$L_\varepsilon v_\varepsilon(x)=L_\varepsilon[\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^n v_n+\cdots)]=0, \quad (1.9)$$

并连同 $w_\varepsilon(x)$，即

$$w_\varepsilon(x)+v_\varepsilon(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i w_i+\varepsilon^k\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_i$$

满足初始条件(1.2)和(1.3)，亦即要求所构造的函数 v 应具有边界层性质，起到边界层校正项的作用．

对应于第一次分解的求解过程称为**第一迭代过程**，对应于第二次分解的求解过程称为**第二迭代过程**．如果这两个迭代过程得以实现，由于方程(1)是线性的，则可求得问题(1.1)，(1.2)，(1.3)如下形式的级数解：

$$u_\varepsilon(x)=(w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^n w_n+\cdots)$$
$$+\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^n v_n+\cdots). \qquad (1.10)$$

现在来详细阐述这两个过程．

1) 第一迭代过程．由方程(1.7)我们有

$$L_\varepsilon\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i w_i\right)=\left\{L_k+\sum_{r=1}^{l}\varepsilon^r a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}\right\}$$
$$\times\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i w_i\right)=h(x). \qquad (1.11)$$

在上一方程的左端合并 ε 的同幂项并与右端比较系数，便得到逐次确定函数 $w_0(x)$，$w_1(x)$，$\cdots$ 的递推方程：

$$\left.\begin{aligned}&L_k w_0=h(x),\\&L_k w_1=-L_{k+1}w_0,\\&L_k w_2=-L_{k+1}w_1-L_{k+2}w_0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&L_k w_i=-\sum_{r=1}^{[i]}L_{k+r}w_{i-r}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots),\end{aligned}\right\}\qquad(1.12)$$

其中 $[i]=\min(i,\ l)$，$L_{k+s}\equiv a_{k+s}(x)\dfrac{d^{k+s}}{dx^{k+s}}$．(1.12) 中的第一个方程就是退化方程(1.4)，而其余的方程也都是线性常微分方程，它们和退化方程(1.4)的差别只在于右端项．根据递推过程，这些方程的右端都是已知函数，但问题是作用在已求得的函数 $w_i(x)$ 上的算子其阶数是高于 L_k 的微分算子，因此必须假定算子 L_k 的系数 $a_j(x)$ 及右端 $h(x)$ 应充分光滑以保证这些方程连同初始条件 (1.2) 足以确定函数 $w_i(x)$ $(i=0,\ 1,\ \cdots)$．

2) 第二迭代过程. 在 $x=0$ 的邻域内引入伸长变换

$$t=x/\varepsilon. \tag{1.13}$$

于是有

$$\frac{d}{dx}=\varepsilon^{-1}\frac{d}{dt},\quad \frac{d^j}{dx^j}=\varepsilon^{-j}\frac{d^j}{dt^j}, \tag{1.14}$$

因此

$$\begin{aligned}\varepsilon^k L_\varepsilon u&=\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon^k a_j(x)\frac{d^ju}{dx^j}+\sum_{r=0}^{l}\varepsilon^{k+r}a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}u}{dx^{k+r}}\\&=\sum_{j=0}^{k-1}\varepsilon^{k-j}a_j(\varepsilon t)\frac{d^ju}{dt^j}+\sum_{r=0}^{l}a_{k+r}(\varepsilon t)\frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}}.\end{aligned} \tag{1.15}$$

根据假定, 方程(1.1)的系数 $a_j(x)$ $(j=0,\ 1,\ \cdots,\ k+l)$ 都是充分光滑函数. 我们在点 $x=0$ 的邻域内展开这些系数:

$$\begin{aligned}a_j(x)&=a_{j,0}+\sum_{s=1}^{N}a_{j,s,0}x^s+a_{j,N+1,0}(x)x^{N+1}\\&=a_{j,0}+\sum_{s=1}^{N}a_{j,s,0}\varepsilon^st^s+\varepsilon^{N+1}a_{j,N+1,0}(x)t^{N+1},\end{aligned} \tag{1.16}$$

其中 $a_{j,0}=a_j(x)\big|_{x=0},\ a_{j,s,0}=\dfrac{1}{s!}\dfrac{d^s}{dx^s}a_j(x)\big|_{x=0}.$

当 $j<k$ 时只需展开 $a_j(x)$ 为

$$a_j(x)=a_{j,0}+\sum_{s=1}^{N+j-k}a_{j,s,0}\varepsilon^st^s+\varepsilon^{N+1+j-k}a_{j,N+1+j-k,0}(x)t^{N+1+j-k} \tag{1.17}$$

即可. 现将表达式(1.16) $(j\geqslant k)$ 和表达式(1.17) $(j<k)$ 分别代入(1.15)右端的两个和式内, 合并关于 ε 的同幂项, 我们得到

$$\varepsilon^kL_\varepsilon u\equiv M_0u+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^jR_ju+\varepsilon^{N+1}R_{N+1}u, \tag{1.18}$$

其中

$$M_0u\equiv\sum_{r=0}^{l}a_{k+r,0}\frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}} \tag{1.19}$$

是常系数线性微分算子,

$$R_1u\equiv\sum_{r=0}^{l}ta_{k+r,1,0}\frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}}+a_{k-1,0}\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}, \qquad (1.20)$$

一般地，$R_iu(1\leqslant i\leqslant N)$ 是线性微分算子，其系数是次数不高于 i 的 t 的幂函数；R_{N+1} 是线性微分算子，其系数是形如 $a_{j,N+1,0}(x)$ 的函数与次数不超过 $N+1$ 的 t 的幂函数的乘积．如此我们得到原来线性微分算子 L_ε 在 $x=0$ 附近的新的分解：

$$L_\varepsilon u\equiv\varepsilon^{-k}\left(M_0u+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^jR_ju+\varepsilon^{N+1}R_{N+1}u\right). \qquad (1.21)$$

因此为了确定函数 v_0, v_1, …, 由方程(1.9)和表达式(1.21)得到

$$\begin{aligned}0&=L_\varepsilon[\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^nv_n+\cdots)]\\&=\left(M_0+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^jR_j+\varepsilon^{N+1}R_{N+1}\right)\\&\quad\times(v_0+\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^nv_n+\cdots). \qquad (1.22)\end{aligned}$$

在(1.22)中合并 ε 的同幂项并令 ε^i 的所有项为零，则得到确定 v_0, v_1, …, v_n, … 的递推方程：

$$M_0v_0=\sum_{r=0}^{l}a_{k+r,0}\frac{d^{k+r}v_0}{dt^{k+r}}=0, \qquad (1.23)$$

$$M_0v_i=-\sum_{r=1}^{i}R_rv_{i-r},\ i=1,\ 2,\ \cdots, \qquad (1.24)$$

方程(1.23)是一齐次的常系数常微分方程，方程(1.24)是非齐次的常系数常微分方程，它和(1.23)的差别只在于方程的右端，而左端的线性微分算子是同一个．在一定初始条件下我们逐次解方程(1.23)和(1.24)即可得到所要求的函数 v_0, v_1, …, v_n, …．现在的问题是，如何保证这些函数具有边界层性质，连同第一迭代过程中所求得的 w_i 使所有初始条件(1.2)和(1.3)都得到满足．为此我们需要研究方程(1.23)的特征方程．

1-4 正则退化 方程(1.23)的特征方程是

$$\sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0}\lambda^{k+r}=0$$

或

$$\lambda^k\sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0}\lambda^{r}=0.$$

令

$$Q_0(\lambda)=\sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0}\lambda^{r},$$

则有

$$\lambda^k Q_0(\lambda)=\lambda^k\sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0}\lambda^{r}=0. \qquad (1.25)$$

若方程(1.25)有 l 个相异的根，并且这些根具有负的实数部分，即有

$$-\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \cdots,\ -\lambda_l(\mathrm{Re}\lambda_i>0)$$

l 个根，则方程(1.25)与 $-\lambda_i$ 相应的特解是

$$v=\exp(-\lambda_i t)=\exp\left(-\frac{\lambda_i x}{\varepsilon}\right). \qquad (1.26)$$

这个解在 $x=0$ 的邻域内具有边界层性质，即

$$v|_{t=\infty}=0.$$

方程(1.23)具有边界层性质的通解为

$$v_0=\sum_{i=1}^{l} c_i\exp(-\lambda_i t)=\sum_{i=1}^{l} c_i\exp\left(-\frac{\lambda_i x}{\varepsilon}\right). \qquad (1.27)$$

因此方程(1.23)的边界层类型的通解有 l 个自由度．如果给予 l 个初始条件：

$$\left.\frac{d^{k+r}v_0}{dt^{k+r}}\right|_{t=0}=b_r\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1), \qquad (1.28)$$

方程(1.23)的解 v_0 是唯一存在的．事实上，将(1.27)代入(1.28)，我们得到确定 l 个常数 c_i 的线性代数方程组

$$\sum_{i=1}^{l} c_i(-\lambda_i)^{k+r}=b_r\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1). \qquad (1.29)$$

方程组 (1.29) 的系数行列式是 Vandermonde 行列式，根

据我们假定，特征方程(1.25)的根是相异的，故方程组(1.29)有唯一解.

在以上讨论中特征方程(1.25)的根具有上面所述性质是一关键. **如果方程(1.25)具有 l 个相异的根，并且这些根的实数部分是负的，则称问题 A_ε 正则退化为问题 A_0.** 正则退化不但保证构造边界层函数的过程得以实现，而且还可用以研究问题 A_ε 的可解性.

在后面的讨论中我们假定问题 A_ε 是正则退化的.

1-5 二重迭代过程 现将第一迭代过程和以第二次分解为基础的第二迭代过程结合起来，"搭配"求出 $w_0, v_0; w_1, v_1; \cdots$，我们将这一求解过程称为**二重迭代过程**.

级数(1.10)一般地是渐近级数，**我们只限于取具有余项的有限和，即求 u_ε 为以下形式：**

$$u_\varepsilon = W_n + \varepsilon^k V_N + \varepsilon^{n+1} Z_n, \tag{1.30}$$

其中

$$W_n = w_0 + \varepsilon w_1 + \cdots + \varepsilon^n w_n, \tag{1.31}$$

$$V_N = v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^N v_N, \tag{1.32}$$

$\varepsilon^{n+1} Z_n$ 是余项.

为对称起见，令 $w_{n+1} \equiv w_{n+2} \equiv \cdots \equiv w_N \equiv 0$.

利用算子 L_ε 的第一次分解，即方程(1.1)的左端得到展开式

$$L_\varepsilon W_n - h = \left(L_k + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(x) \frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i\right) - h. \tag{1.33}$$

利用算子 L_ε 的第二次分解(1.21)得到展开式

$$L_\varepsilon(\varepsilon^k V_N) = \left(M_0 + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j R_j + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}\right)\left(\sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i v_i\right). \tag{1.34}$$

在展开式(1.33)和(1.34)中合并 ε 的同幂项并令 $\varepsilon^s(s=0, 1, \cdots, n)$的所有系数为零，我们又得到确定 w_i 和 v_i 的递推方程(1.12)和(1.23)、(1.24)(在(1.34)中当 $k\geqslant l$ 时取 $N=n+k$，当 $k<l$ 时取 $N=n+l$，以下假定 $k\geqslant l$)：

$$\left.\begin{array}{l} L_k w_0=h(x), \\ L_k w_i=-\sum_{r=1}^{i} L_{k+r} w_{i-r} \quad (i=1, 2, \cdots, n), \\ \text{规定 } L_{k+l+s}\equiv 0 \quad (s>0). \end{array}\right\} \tag{1.12}$$

$$M_0 v_0=\sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0} \frac{d^{k+r} v_0}{d t^{k+r}}=0, \tag{1.23}$$

$$M_0 v_i=-\sum_{r=1}^{i} R_r v_{i-r} \quad (i=1, 2, \cdots, n+k). \tag{1.24}$$

如此我们有

$$L_\varepsilon W_n=h+\varepsilon^{n+1} X_n, \quad L_\varepsilon(\varepsilon^k V_{n+k})=\varepsilon^{n+1} Y_n. \tag{1.35}$$

于是

$$L_\varepsilon Z_n=-(X_n+Y_n), \tag{1.36}$$

其中 $-\varepsilon^{n+1}(X_n+Y_n)$ 是 $\varepsilon^{n+s}(s\geqslant 1)$ 的有限项之和，X_n+Y_n 在 Banach 范数 $\|\quad\|$ 下是一致有界的，即 $\|X_n+Y_n\|=O(1)$ $(\varepsilon\to 0)$.

为了构造确定 w_i 和 v_i 的二重迭代过程，使得 w_i 和 v_i 按初始条件连接起来，我们将 u_ε 的表达式(1.30)代入初始条件(1.2)和(1.3)，要求其中 $\varepsilon^r(r\leqslant n)$的系数为零，以得到 w_i 和 v_i 应满足的初始条件. 由(1.30)，和(1.2)，(1.3)我们有

$$\begin{aligned} 0=\left.\frac{d^s u_\varepsilon}{d x^s}\right|_{x=0} &=\left.\frac{d^s W_n}{d x^s}\right|_{x=0}+\varepsilon^{-s}\left.\frac{d^s(\varepsilon^k V_{n+k})}{d t^s}\right|_{t=0} \\ &+\varepsilon^{n+1}\left.\frac{d^s Z_n}{d x^s}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^s}{d x^s}\left(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i\right)\right|_{x=0} \\ &+\varepsilon^{k-s}\left.\frac{d^s}{d t^s}\left(\sum_{j=0}^{n+k} \varepsilon^j v_j\right)\right|_{t=0}+\varepsilon^{n+1}\left.\frac{d^s Z_n}{d x^s}\right|_{x=0} \\ &(s=0, 1, 2, \cdots, k-1, k, \cdots, k+l-1). \end{aligned} \tag{1.37}$$

在(1.37)的前 k 个方程中合并 ε 的同幂项并令 $\varepsilon^r(r\leqslant n)$ 的系数为零，则得到

$$\left.\frac{d^s w_i}{dx^s}\right|_{x=0}+\left.\frac{d^s v_{i-k+s}}{dt^s}\right|_{t=0}=0$$

或

$$\left.\frac{d^s w_i}{dx^s}\right|_{x=0}=-\left.\frac{d^s v_{i-(k-s)}}{dt^s}\right|_{t=0}\begin{pmatrix}s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1;\\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{pmatrix}\tag{1.38}$$

(规定当 $r>0$ 时 $v_{-r}\equiv 0$).

当 $s=k+r(r\geqslant 0)$ 时在(1.38)中将 $i+r$ 代以 i，将 i 代以 $i-r$，则可写(1.37)中的其余初始条件为

$$\left.\frac{d^{k+r} v_i}{dt^{k+r}}\right|_{t=0}=-\left.\frac{d^{k+r} w_{i-r}}{dx^{k+r}}\right|_{x=0}\begin{pmatrix}r=0,\ 1,\ \cdots,\ l-1;\\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots n+k\end{pmatrix}\tag{1.39}$$

(规定当 $r>0$ 时 $w_{-r}\equiv 0$).

在(1.37)中还剩下

$$\left.\frac{d^s Z_n}{dx^s}\right|_{x=0}=\gamma_s\quad(s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k+l-1),\tag{1.40}$$

其中 γ_s 是已知数.

从而我们得到 $w_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ 和 $v_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n+k)$ 应满足的初始条件(1.38)和(1.39)，以及确定 w_i 和 v_i 的相应初值问题:

$$\begin{cases}L_k w_0=h(x),\\ L_k w_i=-\sum\limits_{r=1}^{i} L_{k+r} w_{i-r},\ L_{k+l+s}\equiv 0\quad(s>0), & (1.12)\\ \quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ \left.\frac{d^s w_i}{dx^s}\right|_{x=0}=-\left.\frac{d^s v_{i-(k-s)}}{dt^s}\right|_{t=0}\begin{pmatrix}s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1;\\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{pmatrix}, & (1.38)\\ \quad v_{-r}\equiv 0\quad(r>0).\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
M_0 v_0 = \sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0} \dfrac{d^{k+r} v_0}{dt^{k+r}} = 0, & (1.23) \\
M_0 v_i = -\sum_{r=1}^{i} R_r v_{i-r} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+k), & (1.24) \\
\left.\dfrac{d^{k+r} v_i}{dt^{k+r}}\right|_{t=0} = -\left.\dfrac{d^{k+r} w_{i-r}}{dx^{k+r}}\right|_{x=0} & \\
\quad \begin{pmatrix} r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1; \\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n+k \end{pmatrix}, & (1.39) \\
w_{-r} \equiv 0 \quad (r>0).
\end{cases}
$$

由于 w_i 和 v_i 所满足的初始条件有(1.38)和 (1.39) 这样的关系式,我们可以成对地确定 w_0, v_0; w_1, v_1; $\cdots$, w_{n+k}, v_{n+k}.

在条件(1.38)中令 $i=0$, 则得到

$$
\left.\frac{d^s w_0}{dx^s}\right|_{x=0} = 0 \quad (s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k-1),
$$

这就是初始条件(1.2),因此 w_0 是退化问题 A_0 的解.

假定 w_0 已求得,在初始条件(1.39)中令 $i=0$, 则得到 v_0 应满足的初始条件:

$$
\left.\frac{d^k v_0}{dt^k}\right|_{t=0} = -\left.\frac{d^k w_0}{dx^k}\right|_{x=0}
$$
$$
\left.\frac{d^{k+r} v_0}{dt^{k+r}}\right|_{t=0} = 0 \ (r=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1). \qquad (1.41)
$$

根据 1-4 的讨论,在问题 A_s 正则退化的情况下初值问题(1.23), (1-41)有唯一解 (条件 (1.41) 只是条件 (1.28) 的特殊情形), 并且 v_0 具有(1.27)形式, 因此是边界层类型的函数.

为了求得 u_s 的渐近式的高阶摄动项需对初值问题(1.12)($i\geqslant 1$), (1.38)和(1.24), (1.34)作进一步的讨论.

现用归纳法来进行论证.

假定对一数 $i(i\leqslant n)$, 当 $r<i$ 时, 我们已求得所有 w_r 和

v_r,那末在(1.12)的第 i 个方程的右端以及初始条件(1.38)的右端都是已知函数. 根据假定, 退化问题 A_0 是可解的, 因此相应的非齐次方程(1.12)在初始条件(1.38)下有唯一解 w_i.

对于初值问题(1.24), (1.39), 其方程与方程(1.23)的差别只在于一个是齐次方程, 另一个是非齐次方程. 根据假定, 方程(1.24)和初始条件(1.39)的右端也都是已知函数. 我们可以求非齐次方程(1.24)的通解为齐次方程的通解与非齐次方程的一个特解之和的形式. 此外, 为了达到我们构造渐近解的目的, 尚须证明函数 v_i 都应是边界层类型的函数. 为此我们证明下面一个引理.

引理 1 方程(1.23), (1.24)的解 $v_i(i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 有以下形式

$$v_i=\sum_{r=1}^{l} P_{ri}(t)e^{-\lambda_r t}, \tag{1.42}$$

其中 $P_{ri}(t)$ 是 t 的多项式.

证明 当 $i=0$ 时, 按公式(1.27)这一论断是成立的. 假定对一切 $v_s(s\leqslant i-1)$ 这一论断成立, 现证当 $s=i$ 时论断亦成立. 根据我们对算子 L_s 在 $x=0$ 附近所作第二次分解, 我们知道, $R_s(s\leqslant n)$ 是一线性微分算子, 其系数是次数不超过 s 的 t 的多项式. 按归纳法, 假定所有 $v_s(s\leqslant i-1)$ 都具有(1.42)形式, 因此方程(1.24)的右端亦具有此形式, 我们把它表示为 b_i:

$$b_i=\sum_{r=1}^{l} b_{ri}, \tag{1.43}$$

$$b_{ri}=\sum_{s=0}^{l_{ri}} c_{s,ri}t^s e^{-\lambda_r t}. \tag{1.44}$$

现以 b_{ri} 为右端, 利用常数变易法求方程

$$M_0 v_{ri}=b_{ri} \tag{1.45}$$

的如下形式的特解：

$$v_{ri}=\sum_{s=0}^{l_{ri}+1} d_{s,ri}t^{s}e^{-\lambda_r t}. \tag{1.46}$$

将这些特解迭加起来就得到方程(1.24)的特解

$$v_i^*=\sum_{r=1}^{l} v_{ri}, \tag{1.47}$$

$$M_0 v_i^* = b_i.$$

方程(1.24)的通解可用此特解加上相应齐次方程(1.23)的通解(1.27)得到，故有

$$v_i=v_i^*+\sum_{i=1}^{l} c_i \exp(-\lambda_i t). \tag{1.48}$$

从而由(1.46)，(1.47)，(1.48)推得，方程(1.24)的解亦具有(1.42)形式，于是引理得证.

将表达式(1.48)代入初始条件(1.39)就得到确定系数 c_i 的线代数方程组，根据前面的讨论，这一方程组在正则退化的条件下是唯一可解的.

因此初值问题(1.24)，(1.39)有唯一解 v_i，并且 v_i 是边界层类型函数.

若迭代过程到 $n+k$ 步为止，我们即可求得所要的 w_0, v_0; w_1, v_1; $\cdots$; w_{n+k}, v_{n+k}，从而得到奇异摄动问题 A_ε 解 u_ε 的渐近展开式(1.30).

1-6　余项估计　我们知道余项 $\varepsilon^{n+1}Z_n$ 中的函数 Z_n 满足方程(1.36)

$$L_\varepsilon Z_n=-(X_n+Y_n), \tag{1.36}$$

和初始条件(1.40)

$$\left.\frac{d^s Z_n}{dx^s}\right|_{x=0}=\gamma_s \quad (s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k+l-1), \tag{1.40}$$

其中 $-\varepsilon^{n+1}(X_n+Y_n)$是展开式 $-[L_\varepsilon(W_n+\varepsilon^k V_{n+k})-h]$ 中

$\varepsilon^{n+s}(s\geqslant 1)$的有限项之和，$X_n+Y_n$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时在$[0, 1]$上一致有界：$\|X_n+Y_n\|=O(1)$，$\|\quad\|$是 Banach 范数.

如能证得函数 Z_n 在一 Banach 范数 $\|\quad\|_1$ 下是一致有界量，即 $\|Z_n\|_1=O(1)$，那末我们就得到渐近式(1.30)的余项估计，它的阶数是 $O(\varepsilon_{\varepsilon}^{n+1})$. 为此我们构造函数 $Z_n^{(1)}$，要求它在区间$[0, 1]$内有 $k+l$ 阶有界导数并且满足初始条件(1.40)，例如可构造它为以下形式：

$$Z_n^{(1)}=\sum_{s=0}^{k+l-1}\frac{Y_s}{s!}X^s. \tag{1.49}$$

如此可将 Z_n 分解为 $Z_n^{(1)}$ 和 $Z_n^{(2)}$ 之和：

$$Z_n=Z_n^{(1)}+Z_n^{(2)}, \tag{1.50}$$

$Z_n^{(2)}$ 是下面初值问题的解

$$L_\varepsilon Z_n^{(2)}=-(X_n+Y_n+L_\varepsilon Z_n^{(1)}), \tag{1.51}$$

$$\left.\frac{d^sZ_n^{(2)}}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k+l-1), \tag{1.52}$$

初始条件(1.52)已经是齐次初始条件.

在这一节的一开始，我们曾假定摄动问题 A_ε 是一致可解的，即算子 L_ε 有逆算子 L_ε^{-1} 存在并且此逆算子按某种范数关于 ε 是一致有界的. 现给出 L_ε^{-1} 一致有界的精确定义，即当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时，对满足初始条件(1.52)并使 L_ε 有意义的一切函数 u 有如下不等式成立：

$$\|L_\varepsilon u\|\geqslant\alpha^2\|u\|_1, \tag{1.53}$$

其中 ε_0 和 $\alpha^2>0$ 都是常数，$\|\quad\|_1$，$\|\quad\|$ 是 Banach 范数，范数 $\|\quad\|$可取在 $L_p[0, 1]$内.

根据方程(1.51)和条件(1.53)推得

$$\|Z_n^{(2)}\|_1\leqslant\frac{1}{\alpha^2}(\|X_n\|+\|Y_n\|+\|L_\varepsilon Z_n^{(1)}\|). \tag{1.54}$$

从而

$$\|Z_n\|_1 \leqslant \|Z_n^{(1)}\|_1 + \|Z_n^{(2)}\|_1. \tag{1.55}$$

因此 Z_n 在 $\|\ \ \|_1$ 范数下是有界的.

综合以上讨论,我们得到如下结果:

定理 1 若 1) 问题 A_0 有唯一解;

2) 奇异摄动问题 A_ε 正则退化为问题 A_0;

3) 算子 L_ε^{-1} 在(1.53)意义下一致有界;

4) 方程(1)的系数和右端函数充分光滑, 足以使二重迭代过程能够实现.

则问题 (1.1), (1.2), (1.3) 的解 $u_\varepsilon(x)$有渐近展开式(1.30)～(1.32), 其中 w_i, v_i 是分别解初值问题(1.12), (1.38)和(1.23), (1.24), (1.39) 得到的,其余项 $\|\varepsilon^{n+1}Z_n\|_1 = O(\varepsilon^{n+1})$.

表达式(1.30)还可改写为

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i + \sum_{i=0}^{n+k} \varepsilon^i \bar{v}_i + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{1.56}$$

其中 $\bar{v}_i = \varepsilon^k v_i$ 是 k 阶边界层类型函数.

§2 线性变系数常微分方程边值问题

2-1 微分方程问题 在区间 [0, 1] 内解线性变系数常微分方程边值问题 A_ε:

$$L_\varepsilon u \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j(x) \frac{d^j u}{dx^j} + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(x) \frac{d^{k+r} u}{dx^{k+r}} = h(x), \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=0} = 0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{k}_1 - 1), \quad \left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=1} = 0$$

$$(s=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{k}_2 - 1;\ \bar{k}_2 = k - \bar{k}_1), \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{d^{\bar{k}_1+r}u}{dx^{k_1+r}}\right|_{x=0}=0 \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{l}_1-1),\ \left.\frac{d^{\bar{k}_2+r}u}{dx^{\bar{k}_2+r}}\right|_{x=1}=0$$

$$(r=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{l}_2-1;\ \bar{l}_2=l-\bar{l}_1), \tag{2.3}$$

其中 $a_k(x)\neq 0$, $x\in[0,\ 1]$, $\varepsilon>0$, 是小参数, $a_j(x)(j=0,\ 1,\ \cdots,\ k+l)$是$[0,\ 1]$上的充分光滑函数.

令

$$L_k w \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\frac{d^j w}{dx^j}. \tag{2.4}$$

当 $\varepsilon=0$ 时方程(2.1)退化为方程(2.4), 摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0: 在区间$[0,\ 1]$内解边值问题:

$$L_k w = h(x), \tag{2.5}$$

$$\left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{k}_1-1),\ \left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=1}=0$$

$$(s=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{k}_2-1;\ \bar{k}_2=k-\bar{k}_1). \tag{2.2}$$

在此情况下方程的阶数降低 l, 在端点 $x=0$ 失去 $\bar{l}_1$ 个边界条件, 在 $x=1$ 失去 $\bar{l}_2$ 个边界条件, 共失去 l 个边界条件. 此时不仅在 $x=0$ 附近产生边界层, 而且在 $x=1$ 附近也产生边界层.

下面我们来构造边值问题 A_ε 的渐近解.

2-2 基本迭代过程 第一迭代过程和初值问题一样, 利用算子 L_ε 的原来分解, 即方程(2.1)的左端, 求出函数 $w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_n,\ \cdots$ 的递推方程(参看方程(1.12))、在相应边界条件下解这些方程以得到 $w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_n,\ \cdots$.

由于在 $x=0$ 和 $x=1$ 两端都产生边界层, 因此构造边界层函数和初值问题不一样, 必须分别在 $x=0$ 附近和 $x=1$ 附近将算子 L_ε 作第二次分解. 在构造边界层函数以前, 我们先作如下的假定:

1) 退化问题 A_0 唯一可解, 即在边界条件(2.2)下零不是

算子 L_k 的特征值，或者说退化问题 A_0 不位于谱上；

2) 问题 A_ε 在(1.53)意义下是一致可解的，但此时函数 u 应满足的不是初始条件(1.52)，而是边界条件(2.2)和(2.3)。

在 $x=0$ 附近算子 L_ε 的第二次分解和初值问题一样具有(1.18)的形式(为区别起见，将 R_j 记为 $R_{j,0}$)：

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^{-k}\left(M_0 u+\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^j R_{j,0}u+\varepsilon^{N+1}R_{N+1,0}u\right), \qquad (2.6)$$

其中

$$M_0 u \equiv \sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0}\frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}}, \qquad (2.7)$$

$$R_{1,0}u \equiv \sum_{r=0}^{l} t a_{k+r,1,0}\frac{d^{k+r}u}{dt^{k+r}}+a_{k-1,0}\frac{d^{k-1}u}{dt^{k-1}}, \qquad (2.8)$$

一般地，$R_{i,0}u(1\leqslant i\leqslant N)$ 的含义与初值问题相同。

在 $x=1$ 附近，我们作代换 $x_1=1-x$ 和伸长变换

$$t_1=\frac{x_1}{\varepsilon}=\frac{1-x}{\varepsilon}. \qquad (2.9)$$

将方程(2.1)的系数 $a_j(x)$ 在 $x=1$ 附近按 Taylor 公式展开，我们有

$$\begin{aligned} a_j(x) &= a_{j,1}+\sum_{s=1}^{N}a_{j,s,1}x_1^s+a_{j,N+1,1}(x_1)x_1^{N+1} \\ &= a_{j,1}+\sum_{s=1}^{N}a_{j,s,1}\varepsilon^s t_1^s+\varepsilon^{N+1}a_{j,N+1,1}(x)t_1^{N+1}, \end{aligned} \qquad (2.10)$$

其中

$$a_{j,1}=a_j(x)\big|_{x=1},\ a_{j,s,1}=\frac{(-1)^s}{s!}\frac{d^s}{dx^s}a_j(x)\Big|_{x=1}.$$

同样地，当 $j<k$ 时只需展开 $a_j(x)$ 为

$$a_j(x)=a_{j,1}+\sum_{s=1}^{N+j-k}a_{j,s,1}\varepsilon^s t_1^s$$
$$+\varepsilon^{N+1+j-k}a_{j,N+1+j-k,1}(x)t_1^{N+1+j-k} \qquad (2.11)$$

即可. 将表达式(2.10), (2.11)代入算子 L_ε 的原来表达式并利用 $\frac{d}{dx}=-\varepsilon^{-1}\frac{d}{dt_1}$, $\frac{d^j}{dx^j}=(-1)^j\varepsilon^{-j}\frac{d^j}{dt_1^j}$, 得到算子 L_ε 在 $x=1$ 附近的第二次分解

$$L_\varepsilon u\equiv\varepsilon^{-k}\left(M_1u+\sum_{j=1}^{N+1}\varepsilon^jR_{j,1}u\right), \qquad (2.12)$$

其中

$$M_1u\equiv\sum_{i=0}^{l}(-1)^{k+r}a_{k+r,1}\frac{d^{k+r}u}{dt_1^{k+r}}, \qquad (2.13)$$

算子 $R_{j,1}$ 类似于 $R_{j,0}(1\leqslant j\leqslant N+1)$.

我们构造边值问题(2.1), (2.2), (2.3)的以下形式的级数解:

$$u_\varepsilon=w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^n w_n+\cdots+\varepsilon^{\bar{k}_1}(v_0^{(0)}+\varepsilon v_1^{(0)}$$
$$+\cdots+\varepsilon^N v_N^{(0)}+\cdots)+\varepsilon^{\bar{k}_2}(v_0^{(1)}+\varepsilon v_1^{(1)}$$
$$+\cdots+\varepsilon^N v_N^{(1)}+\cdots), \qquad (2.14)$$

其中第一个和是以算子 L_ε 原来分解为基础通过第一迭代过程在一定边界条件下求得的(参看(1.11), (1.12)). 而第二个和与第三个和是将算子 L_ε 分别在 $x=0$ 和 $x=1$ 附近进行第二次分解后通过第二迭代过程在一定初始条件下求得(参看(1.23), (1.24)), 它们应起边界层校正作用, 即与第一个和相加起来除满足方程(2.1)外, 还应补足失去的边界条件使所有边界条件都得到满足. 为了能使构造过程"搭配"地进行, 和初值问题一样, 应将第一迭代过程和第二迭代过程结合起来. 为此, 将表达式(2.14)代入方程(2.1)和边界条件(2.2), (2.3), 注意将算子 L_ε 的原来分解作用在函数 w_i 上, 将

第二次分解分别作用在函数 $v_i^{(0)}$ 和 $v_i^{(1)}$ 上，我们有

$$L_\varepsilon u_\varepsilon=\left(\sum_{j=0}^{k}a_j(x)\frac{d^j}{dx^j}+\sum_{r=1}^{l}\varepsilon^r a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}\right)(w_0+\varepsilon w_1+\cdots)$$

$$+\varepsilon^{-(k-\bar{k}_1)}\left(M_0+\sum_{j=1}^{N+1}\varepsilon^j R_{j,0}\right)$$

$$\times(v_0^{(0)}+\varepsilon v_1^{(0)}+\cdots+\varepsilon^n v_n^{(0)}+\cdots)$$

$$+\varepsilon^{-(k-\bar{k}_2)}\left(M_1+\sum_{j=1}^{N+1}\varepsilon^j R_{j,1}\right)$$

$$\times(v_0^{(1)}+\varepsilon v_1^{(1)}+\cdots+\varepsilon^n v_n^{(1)}+\cdots)=h(x), \tag{2.15}$$

$$\frac{d^s u}{dx^s}\bigg|_{x=0}=\frac{d^s}{dx^s}(w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^n w_n+\cdots)\big|_{x=0}$$

$$+\varepsilon^{-s+\bar{k}_1}\frac{d^s}{dt^s}(v_0^{(0)}+\varepsilon v_1^{(0)}$$

$$+\cdots+\varepsilon^n v_n^{(0)}+\cdots)\big|_{t=0}=0$$

$$(s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{k}_1-1), \tag{2.16}$$

$$\frac{d^{\bar{k}_1+r}u_\varepsilon}{dx^{\bar{k}_1+r}}\bigg|_{x=0}=\frac{d^{\bar{k}_1+r}}{dx^{\bar{k}_1+r}}(w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^n w_n+\cdots)\big|_{x=0}$$

$$+\varepsilon^{-r}\frac{d^{\bar{k}_1+r}}{dt^{\bar{k}_1+r}}(v_0^{(0)}+\varepsilon v_1^{(0)}$$

$$+\cdots+\varepsilon^n v_n^{(0)}+\cdots)\big|_{t=0}=0$$

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{l}_1-1), \tag{2.17}$$

$$\frac{d^s u_\varepsilon}{dx^s}\bigg|_{x=1}=\frac{d^s}{dx^s}(w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^n w_n+\cdots)\bigg|_{x=1}$$

$$+\varepsilon^{-s+\bar{k}_2}\frac{d^s}{dt_1^s}(v_0^{(1)}+\varepsilon v_1^{(1)}$$

$$+\cdots+\varepsilon^n v_n^{(1)}+\cdots)\bigg|_{t_1=0}=0$$

$$(s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{k}_2-1), \tag{2.18}$$

$$\left.\frac{d^{\bar{k}_2+r}u_\varepsilon}{dx^{k_2+r}}\right|_{x=1}=\left.\frac{d^{\bar{k}_2+r}}{dx^{k_2+r}}(w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^n w_n+\cdots)\right|_{x=1}$$

$$+\varepsilon^{-r}\frac{d^{\bar{k}_2+r}}{dt^{\bar{k}_2+r}}(v_0^{(1)}+\varepsilon v_1^{(1)}$$

$$\left.+\cdots+\varepsilon^n v_n^{(1)}+\cdots)\right|_{t_1=0}=0$$

$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{l}_2-1). \tag{2.19}$$

在(2.15)中合并 ε 的同幂项，关于一次近似 $w_0, v_0^{(0)}, v_0^{(1)}$ 我们有以下的方程：

$$L_k w_0 \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j(x)\frac{d^j w_0}{dx^j}=h(x), \tag{2.20}$$

$$M_0 v_0^{(0)} \equiv \sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0}\frac{d^{k+r}v_0^{(0)}}{dt^{k+r}}=0, \tag{2.21}$$

$$M_1 v_0^{(1)} \equiv \sum_{r=0}^{l}(-1)^{k+r}a_{k+r,1}\frac{d^{k+r}v_0^{(1)}}{dt_1^{k+r}}=0, \tag{2.22}$$

方程(2.21)，(2.22)是常系数的常微分方程．关于高次近似 $w_i, v_i^{(0)}$ 和 $v_i^{(1)}(i\geqslant 1)$ 由(2.15)知它们分别满足方程

$$L_k w_i \equiv -\sum_{r=1}^{[i]} L_{k+r}w_{i-r} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots), \tag{2.23}$$

$$[i]=\min(i,\ l),$$

$$M_0 v_i^{(0)}=-\sum_{r=1}^{i} R_{r,0}v_{i-r}^{(0)} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots), \tag{2.24}$$

$$M_1 v_i^{(1)}=-\sum_{r=1}^{i} R_{r,1}v_{i-r}^{(1)} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots). \tag{2.25}$$

这些方程的左端分别和方程(2.20)，(2.21)，(2.22)相同，其差别只在于右端项．现在来定出边界条件和初始条件，由(2.16)令 ε^i 的系数为零，得到

$$\left.\frac{d^s w_i}{dx^s}\right|_{x=0}+\left.\frac{d^s v_{i-(\bar{k}_1-s)}^{(0)}}{dt^s}\right|_{t=0}=0 \tag{2.26}$$

（规定 $v_{-r}^{(0)}\equiv 0,\ r>0$）$(s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \bar{k}_1-1)$.

当$s=\bar{k}_1+r,\ r\geqslant 0$时，和初值问题处理的方法一样，以$i$代替$i+r$，以$i-r$代替$i$，得到

$$\left.\frac{d^{\bar{k}_1+r}v_i^{(0)}}{dt^{\bar{k}_1+r}}\right|_{t=0}+\left.\frac{d^{\bar{k}_1+r}w_{i-r}}{dx^{\bar{k}_1+r}}\right|_{x=0}=0 \tag{2.27}$$

$$(\text{规定 } w_{-r}\equiv 0,\ r>0)$$

$$(r=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{l}_1-1).$$

同理，在$x=1$我们有

$$\left.\frac{d^s w_i}{dx^s}\right|_{x=1}+\left.\frac{d^s v_{i-(\bar{k}_2-s)}^{(1)}}{dt_1^s}\right|_{t_1=0}=0$$

$$\begin{pmatrix} s=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{k}_2-1 \\ i=0,\ 1,\ \cdots \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

$$\left.\frac{d^{\bar{k}_2+r}v_i^{(1)}}{dt_1^{\bar{k}_2+r}}\right|_{t_1=0}+\left.\frac{d^{\bar{k}_2+r}w_{i-r}}{dx^{\bar{k}_2+r}}\right|_{x=1}=0$$

$$\begin{pmatrix} r=0,\ 1,\ \cdots,\ \bar{l}_2-1 \\ i=0,\ 1,\ \cdots \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

我们的目的是要构造奇异摄动边值问题(2.1), (2.2), (2.3)的渐近解，当然要求$v_i^{(0)}$和$v_i^{(1)}$应具有边界层性质，为此必须研究方程(2.21)和(2.22)的特征方程。

2-3 正则退化 对应于方程(2.21)和(2.22)的特征方程是

$$\sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0}\lambda^{k+r}=0$$

和方程
$$\sum_{r=0}^{l}(-1)^{k+r}a_{k+r,1}\mu^{k+r}=0$$

或
$$\lambda^k\sum_{r=0}^{l}a_{k+r,0}\lambda^r=0,$$

$$\mu^k\sum_{r=0}^{l}(-1)^{k+r}a_{k+r,1}\mu^r=0.$$

令
$$Q_0(\lambda)=\sum_{r=0}^{l}a_{k+r,0}\lambda^r,$$

$$Q_1(\mu)=\sum_{r=0}^{l}(-1)^{k+r}a_{k+r,1}\mu^r,$$

则有

$$\lambda^k Q_0(\lambda)=0, \tag{2.30}$$

$$\mu^k Q_1(\mu)=0. \tag{2.31}$$

若方程(2.30), (2.31)分别有 l_1 个和 l_2 个相异的根:

$$-\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \cdots,\ -\lambda_{l_1},$$

$$-\mu_1,\ -\mu_2,\ \cdots,\ -\mu_{l_2},$$

并且这些根具有负的实数部分 $\mathrm{Re}\lambda_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l_1)$, $\mathrm{Re}\mu_i>0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l_2)$, 则方程(2.30), (2.31)的特解

$$v_i^{(0)}=\exp(-\lambda_i t)=\exp\left(-\frac{\lambda_i x}{\varepsilon}\right) \tag{2.32$_1$}$$

和

$$v_i^{(1)}=\exp(-\mu_i t_1)=\exp\left(-\frac{\mu_i(1-x)}{\varepsilon}\right) \tag{2.32$_2$}$$

都是边界层类型的函数. 方程(2.30), (2.31)具有边界层性质的通解分别是

$$v^{(0)}=\sum_{i=1}^{l_1}c_i\exp(-\lambda_i t)=\sum_{i=1}^{l_1}c_i\exp\left(-\frac{\lambda_i x}{\varepsilon}\right), \tag{2.33}$$

$$v^{(1)}=\sum_{i=1}^{l_2}d_i\exp(-\mu_i t_1)=\sum_{i=1}^{l_2}d_i\exp\left(-\frac{\mu_i(1-x)}{\varepsilon}\right), \tag{2.34}$$

其中 c_i, d_i 都是任意常数. 因此表达式(2.33), (2.34)分别有 l_1 个和 l_2 个自由度, 由初始条件(2.27), (2.29) 和 § 1 所讨论的初值问题一样, c_i, d_i 可唯一确定.

在上面讨论中特征方程(2.30), (2.31)的根满足所述条件时, 才能保证方程(2.30), (2.31)的解具有边界层性质. 如果此条件成立, 即特征方程(2.30), (2.31)分别有 l_1 个相异的根 $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $\cdots$, $-\lambda_{l_1}$ 和 l_2 个相异的根 $-\mu_1$, $-\mu_2$, $\cdots$, $-\mu_{l_2}$, 并且这些根都具有负的实数部分, 则称边值问题 A_s 正

则退化为问题 A_0，我们假定问题 A_ε 是正则退化的.

2-4 渐近解的进一步讨论 级数(2.14)一般地是渐近级数，我们只限于取具有余项的有限和，即求 u_ε 为以下形式：

$$u_\varepsilon=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i w_i+\varepsilon^{\bar{k}_1}\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i^{(0)}+\varepsilon^{\bar{k}_2}\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i^{(1)}+\varepsilon^{n+1}Z_n. \qquad (2.35)$$

设

$$W_n=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i w_i,\quad V_N^{(0)}=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i^{(0)},\quad V_N^{(1)}=\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i^{(1)}.$$

则(2.35)可改写为

$$u_\varepsilon=W_n+\varepsilon^{\bar{k}_1}V_N^{(0)}+\varepsilon^{\bar{k}_2}V_N^{(1)}+\varepsilon^{n+1}Z_n. \qquad (2.36)$$

此时方程(2.15)变为

$$\begin{aligned}L_\varepsilon u_\varepsilon=&\left\{\left(\sum_{j=0}^{k}a_j(x)\frac{d^j}{dx^j}+\sum_{r=1}^{l}\varepsilon^r a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}\right)\right.\\&\left.\times\left(\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i w_i\right)\right\}+\left\{\varepsilon^{-(k-\bar{k}_1)}\left(M_0+\sum_{j=1}^{N+1}\varepsilon^j R_{j,0}\right)\right.\\&\left.\times\left(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i^{(0)}\right)\right\}+\left\{\varepsilon^{-(k-\bar{k}_2)}\right.\\&\left.\times\left(M_1+\sum_{j=1}^{N+1}\varepsilon^j R_{j,1}\right)\left(\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i v_i^{(1)}\right)\right\}\\&+\varepsilon^{n+1}L_\varepsilon Z_n=h(x).\end{aligned} \qquad (2.15')$$

根据2.2，如递推方程(2.20)，(2.23)成立，则对(2.15′)的第一个花括号来说有下式成立

$$L_\varepsilon W_n=h(x)+\varepsilon^{n+1}X_n. \qquad (2.37)$$

为了使(2.15′)中第二个花括号的所有 ε^i $(i=-(k-\bar{k}_1), -(k-\bar{k}_1)+1, \cdots, n)$ 的项都消失，必须假定 $N\geqslant n+k-\bar{k}_1$ $(k\geqslant l)$（当 $k<l$ 时假定 $N\geqslant n+l-\bar{l}_1$），此时我们有递推方程(2.21)和(2.24) $(i=1, 2, \cdots, N)$，并且

$$L_\varepsilon(\varepsilon^{\bar{k}_1}V_N^{(0)})=\varepsilon^{n+1}Y_n^{(0)}. \qquad (2.38)$$

同理，为了使(2.15′)中第三个花括号所有 ε^i $(i\leqslant n)$ 的项

都消失，必须假定 $N \geqslant n+k-\bar{k}_2 (k \geqslant l)$（当 $k<l$ 时假定 $N \geqslant n+l-\bar{l}_2$），此时我们有递推方程(2.22)和(2.25)$(i=1, 2, \cdots, N)$，并且

$$L_\varepsilon(\varepsilon^{\bar{k}_1} V_N^{(1)}) = \varepsilon^{n+1} Y_n^{(1)}, \tag{2.39}$$

为统一起见，在(2.15′)的第二、第三个花括号中取

$$N = n+k-\min(\bar{k}_1, \bar{k}_2) \quad (k \geqslant l), \tag{2.40}$$

当 $k<l$ 时取 $N=n+l-\min(\bar{l}_1, \bar{l}_2)$，以下假定 $k \geqslant l$. 因此，由(2.15′)，(2.37)，(2.38)和(2.39)得到 Z_n 所满足的方程

$$L_\varepsilon Z_n = -(X_n + Y_n^{(0)} + Y_n^{(1)}). \tag{2.41}$$

应指出，$-\varepsilon^{n+1}(X_n + Y_n^{(0)} + Y_n^{(1)})$ 是 $\varepsilon^{n+s} (s \geqslant 1)$ 的有限项之和. 将(2.15′)中 $w_i, v_i^{(0)}, v_i^{(1)}$ 应满足的边界条件(2.26)，(2.28)和初始条件(2.27)，(2.29)分别改写为

$$\left.\frac{d^s w_i}{dx^s}\right|_{x=0} = -\left.\frac{d^s v_{i-(\bar{k}_1-s)}^{(0)}}{dt^s}\right|_{t=0} \begin{pmatrix} s=0, 1, 2, \cdots, \bar{k}_1-1 \\ i=0, 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

$$（规定\ v_{-r}^{(0)} \equiv 0,\ r>0）, \tag{2.43}$$

$$\left.\frac{d^s w_i}{dx^s}\right|_{x=1} = -\left.\frac{d^s v_{i-(\bar{k}_2-s)}^{(1)}}{dt_1^s}\right|_{t_1=0} \begin{pmatrix} s=0, 1, 2, \cdots, \bar{k}_2-1 \\ i=0, 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

$$（规定\ v_{-r}^{(1)} \equiv 0,\ r>0）, \tag{2.45}$$

$$\left.\frac{d^{\bar{k}_1+r} v_i^{(0)}}{dt^{\bar{k}_1+r}}\right|_{t=0} = -\left.\frac{d^{\bar{k}_1+r} w_{i-r}}{dx^{\bar{k}_1+r}}\right|_{x=0} \begin{pmatrix} r=0, 1, \cdots, \bar{l}_1-1 \\ i=0, 1, \cdots, N \end{pmatrix}, \tag{2.46}$$

$$\left.\frac{d^{\bar{k}_2+r} v_i^{(1)}}{dt_1^{\bar{k}_2+r}}\right|_{t_1=0} = -\left.\frac{d^{\bar{k}_2+r} w_{i-r}}{dx^{\bar{k}_2+r}}\right|_{x=1} \begin{pmatrix} r=0, 1, \cdots, \bar{l}_2-1 \\ i=0, 1, \cdots, N \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

（规定 $w_{-r}\equiv 0$, $(r>0)$; $w_{n+1}\equiv w_{n+2}\equiv\cdots\equiv w_N\equiv 0$）. (2.48)

这里的 $N=n+k-\min(\bar{k}_1, \bar{k}_2)$.

根据表达式(2.35), 由(2.16)～(2.19)知, 若 $\varepsilon^s(s\leqslant n)$的所有项消失, 即有(2.42)～(2.48)成立, 则余项中的 Z_n 应满足

$$\left.\frac{d^s Z_n}{dx^s}\right|_{x=0}=\varphi_s \quad (s=0, 1, \cdots, \bar{k}_1+\bar{l}_1-1), \tag{2.49}$$

$$\left.\frac{d^s Z_n}{dx^s}\right|_{x=1}=\psi_s \quad (s=0, 1, \cdots, \bar{k}_2+\bar{l}_2-1), \tag{2.50}$$

其中 φ_s 和 ψ_s 都是已知数.

按边界条件(2.42)～(2.44)解方程(2.20), (2.23)可逐次确定 w_0, w_1, $\cdots$, w_n; 按初始条件(2.46)和(2.48)分别解方程(2.21), (2.24)和方程(2.22), (2.25)可逐次确定 $v_i^{(0)}$, $v_i^{(1)}(i=0, 1, \cdots, N)$. 不但如此, 根据边界条件和初始条件的结构, 我们可以搭配地来确定这些函数.

根据2-3的讨论在摄动问题 A_ε 正则退化的情况下, 函数 $v_0^{(0)}$ 和 $v_0^{(1)}$ 都是边界层类型函数(参看(2.33), (2.34)). 和初值问题一样, 利用数学归纳法同样可以证明 $v_i^{(0)}$ 和 $v_i^{(1)}(i=1, 2, \cdots, N)$ 也都是边界层类型函数, 亦即有类似于§1的引理1成立. 从而有(参看(1.46), (1.47), (1.48))

$$v_i^{(0)}=\sum_{j=1}^{l_1} c_{ij}\exp\left(-\frac{\lambda_j x}{\varepsilon}\right), \tag{2.51}$$

$$v_i^{(1)}=\sum_{j=1}^{l_2} d_{ij}\exp\left(-\frac{\mu_j(1-x)}{\varepsilon}\right) \tag{2.52}$$

$$(i=1, 2, \cdots, N),$$

其中 c_{ij} 是 $t=x/\varepsilon$ 的多项式, d_{ij} 是 $t_1=(1-x)/\varepsilon$ 的多项式.

令

$$\bar{v}_i^{(0)}=\varepsilon^{k_1}v_i^{(0)}, \tag{2.53}$$

$$\bar{v}_i^{(1)} = \varepsilon^{\bar{k}_2} v_i^{(1)} \tag{2.54}$$

$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N),$$

则函数 $\bar{v}_i^{(0)}$ 和 $\bar{v}_i^{(1)}$ 分别是 $\bar{k}_1$ 阶和 $\bar{k}_2$ 阶边界层类型函数. 应指出,这些函数分别只定义在 $x=0$ 和 $x=1$ 的邻域内,为了使它们在整个区间 $[0,\ 1]$ 上都有定义, 现引入**平滑函数** $\psi(x)$: 在 $[0,\ 1]$ 内无限可微并且

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 1/3, \\ 0, & x \geqslant 2/3, \end{cases} \quad 0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1. \tag{2.55}$$

利用平滑函数 $\psi(x)$ 将函数 $v_i^{(0)}$ 和 $v_i^{(1)}$ "粘合"起来得到函数 $\bar{v}_i$:

$$\bar{v}_i = \psi(4x)\bar{v}_i^{(0)} + \psi(4(1-x))\bar{v}_i^{(1)}. \tag{2.56}$$

根据平滑函数的定义

$$\bar{v}_i = \begin{cases} \bar{v}_i^{(0)}, & x \in \left[0,\ \dfrac{1}{12}\right], \\ \bar{v}_i^{(1)}, & x \in \left[\dfrac{11}{12},\ 1\right]. \end{cases} \tag{2.57}$$

在整个区间 $[0,\ 1]$ 上 $\bar{v}_i$ 是边界层类型的函数.

至此我们得到摄动问题(2.1), (2.2), (2.3)的渐近解:

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i w_i + \sum_{i=0}^{N} \varepsilon^i \bar{v}_i + \varepsilon^{n+1} Z_n. \tag{2.58}$$

最后,还须对余项 $\varepsilon^{n+1}Z_n$ 作出估计.

2-5 余项估计 根据(2.41)按 $\psi(x)$ 的定义, 由(2.57)分别在区间 $\left[0,\ \dfrac{1}{12}\right]$ 和 $\left[\dfrac{11}{12},\ 1\right]$ 上有

$$L_\varepsilon Z_n = -(X_n + Y_n^{(0)}) \tag{2.59}$$

和

$$L_\varepsilon Z_n = -(X_n + Y_n^{(1)}), \tag{2.60}$$

其中 X_n、$Y_n^{(0)}$ 和 $Y_n^{(1)}$ 当 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ 时在 $[0,\ 1]$ 上一致有界.

当 $x \geqslant \frac{1}{12}$ 时，所有表达式 $\exp\left(-\lambda_i \frac{x}{\varepsilon}\right)$ 及其导数当 $\varepsilon \to 0$ 时比 ε 的任意次幂还要快地一致趋近于零. 由于函数 ψ 有界并且有有界导数，因此函数 $\psi(4x)\exp\left(-\lambda_i \frac{x}{\varepsilon}\right)$及其导数当 $x \geqslant \frac{1}{12}$ 时比 ε 任意次幂还要快地趋向于零(当 $\varepsilon \to 0$ 时). 当 $x \leqslant \frac{11}{12}$ 时 $\psi(4(1-x))\exp\left(-\frac{\mu_i(1-x)}{\varepsilon}\right)$亦有此性质.

因此,在区间$\left[\frac{1}{12}, \frac{11}{12}\right]$上对任何 i 表达式

$$L_\varepsilon \bar{v}_i = L_\varepsilon(\psi(4x)\bar{v}_i^{(0)} + \psi(4(1-x))\bar{v}_i^{(1)})$$

比 ε^{n+1} 还要快地一致趋于零,从而

$$L_\varepsilon Z_n = -(X_n + Y_n), \quad x \in \left[\frac{1}{12}, \frac{11}{12}\right], \tag{2.61}$$

其中 Y_n 是有界函数,因此在区间[0, 1]上有

$$L_\varepsilon Z_n = g_n(x, \varepsilon), \tag{2.62}$$

其中 $g_n(x, \varepsilon) = -(X_n + Y_n)$在[0, 1]上当 $\varepsilon \to 0$ 时一致有界,即在一 Banach 范数$\|\ \|$意义下有 $\|g_n\| = O(1)$.

如能证得函数 Z_n 在边界条件(2.49), (2.50)下关于一巴拿赫范数$\|\ \|_1$一致有界，即 $\|Z_n\|_1 = O(1)$，那末就得到渐近式(2.58)的余项估计，它的阶数是 $O(\varepsilon^{n+1})$，由于边界条件(2.49), (2.50)是非齐次的，我们可以构造方程(2.62)的解为以下形式:

$$Z_n = Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)}. \tag{2.63}$$

此地 $Z_n^{(1)}$ 是一辅助函数，我们要求它在区间[0, 1]内有 $k+l$ 阶有界导数,并且满足边界条件(2.49)和(2.50),例如可以构造它为 $k+l-1$ 次的多项式，其系数依赖于边界值 φ_s 和 ψ_s.

这样，函数 $Z_n^{(2)}$ 将是齐次条件下微分方程的解：

$$L_\varepsilon Z_n^{(2)}=g_n(x,\ \varepsilon)-L_\varepsilon Z_n^{(1)}, \tag{2.64}$$

$$\left.\frac{d^s Z_n^{(2)}}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_1+l_1-1), \tag{2.65}$$

$$\left.\frac{d^s Z_n^{(2)}}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k_2+l_2-1), \tag{2.66}$$

我们曾假定，摄动问题 A_ε 是一致可解的，即对一切满足齐次边界条件 (2.65), (2.66)并使 L_ε 有定义的函数 u 来说，当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时有如下不等式成立：

$$\|L_\varepsilon u\|\geqslant\alpha^2\|u\|_1, \tag{2.67}$$

其中 ε_0 和 $\alpha^2>0$ 都是常数，$\|\ \ \|_1$, $\|\ \ \|$ 是 Banach 范数，范数 $\|\ \ \|$ 可取为 $L_p[0,\ 1]$ 的范数.

根据(2.64)～(2.67)立即推出 $\|Z_n\|_1$ 的有界性：

$$\|Z_n\|_1\leqslant\|Z_n^{(1)}\|_1+\|Z_n^{(2)}\|_1, \tag{2.68}$$

$$\|Z_n^{(2)}\|_1\leqslant\frac{1}{\alpha^2}(\|g_n\|+\|L_\varepsilon Z_n^{(1)}\|). \tag{2.69}$$

因此，关于摄动问题(2.1), (2.2), (2.3)我们得到如下的结果：

定理 2 若 1) 退化问题 A_0 有唯一解，即 $\lambda=0$ 不是算子 $L_k\equiv\sum\limits_{j=0}^{k}a_j(x)\dfrac{d^j}{dx^j}$ 在齐次边界条件(2.2)下的特征值，或者说，A_0 不位于谱上；

2) 算子 L_ε^{-1} 在(2.67)意义下一致有界；

3) 奇异摄动问题 A_ε 正则退化为问题 A_0；

4) 方程(2.1)的系数和右端函数充分光滑，足以使二重迭代过程能够实现.

则问题(2.1), (2.2), (2.3)的解 $u_\varepsilon(x)$ 有渐近表达式：

$$u_\varepsilon=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i w_i+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{v}_i+\varepsilon^{n+1}Z_n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i w_i+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i[\psi(4x)\bar{v}_i^{(0)}+\psi(4(1-x))\bar{v}_i^{(1)}]+\varepsilon^{n+1}Z_n, \tag{2.58'}$$

其中 w_i 是借助于第一迭代过程按边界条件(2.42)～(2.44)逐次解方程(2.20), (2.23)求得的; 函数 $\bar{v}_i^{(0)}$, $\bar{v}_i^{(1)}$ 分别是 $\bar{k}_1$ 阶和 $\bar{k}_2$ 阶边界层函数, 按初始条件(2.46)和(2.47)分别解方程(2.21), (2.24)求得; 余项 $\varepsilon^{n+1}Z_n$ 有估计式

$$\|\varepsilon^{n+1}Z_n\|_1=O(\varepsilon^{n+1}).$$

2-6 例题 在区间[0, 1]上解边值问题:

$$L_\varepsilon u\equiv-\varepsilon^2\frac{d^3u}{dx^3}-\varepsilon\sin\frac{\pi x}{2}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}=1\quad(0<x<1).$$

$$u(0)=u'(0)=0,\ u(1)=0.$$

这是三阶常微分方程边值问题, 小参数 ε 含于三阶导数项和二阶导数项中, 当 $\varepsilon=0$ 时方程退化为

$$L_0w\equiv\frac{dw}{dx}=1,$$

退化方程是一阶常微分方程. 此方程的特解可以取为 $w=x$, 也可以取为 $w=x-1$. 究竟如何选取, 这与退化方程的定解条件如何给出有关, 而且它直接影响到边界层是出现在 $x=0$ 这一边还是出现在 $x=1$ 这一边, 还是两边都要出现, 这个问题将在下一节进行详细的讨论.

由于退化方程是奇数阶方程, 即 $k=2k_1+1$ (此时 $k_1=0$), 而 $(-1)^{k_1}a_k(x)=(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}(x)=(-1)^0a_1(x)=1>0$, 那末根据下一节的讨论, 退化方程 $L_kw=h(x)$的边界条件应给定为

$$\left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1), \qquad \left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=1}=0$$

$$(s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1-1).$$

对照边界条件(2.2)应有 $\bar{k}_1-1=k_1$, $\bar{k}_2-1=k_1-1$, 即 $\bar{k}_1=k_1+1$, $\bar{k}_2=k_1$. 对于我们的例题来说，退化方程应有一个定解条件 $w|_{x=0}=0$, 因此 $w=x$ 是退化问题

$$L_0 w \equiv \frac{dw}{dx}=1, \quad w|_{x=0}=0$$

的解.

这样,我们的奇异摄动问题当 $\varepsilon=0$ 时在 $x=0$ 和 $x=1$ 两端各失去一个边界条件 $u'(0)=0$ 和 $u(1)=1$.

我们先求一次近似，函数 w_0 即退化问题的解. 在 $x=0$ 附近将原来微分算子 L_ε 作第二次分解. 为此，作代换 $x=\varepsilon t$. 将系数 $\sin\frac{\pi x}{2}$ 在 $x=0$ 附近展开:

$$\sin\frac{\pi x}{2}=\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 x^3+\cdots.$$

我们有

$$\frac{d}{dx}=\varepsilon^{-1}\frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{dx^2}=\varepsilon^{-2}\frac{d^2}{dt^2}, \quad \frac{d^3}{dx^3}=\varepsilon^{-3}\frac{d^3}{dt^3},$$

$$\sin\frac{\pi}{2}\varepsilon t=\varepsilon\frac{\pi t}{2}-\varepsilon^3\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 t^3+\cdots.$$

代入原方程左端得到

$$\begin{aligned}\varepsilon L[u] &\equiv -\frac{d^3u}{dt^3}-\sin\left(\frac{\pi}{2}\varepsilon t\right)\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{du}{dt}=\left(-\frac{d^3u}{dt^3}+\frac{du}{dt}\right)\\ &\quad -\left(\varepsilon\frac{\pi t}{2}-\varepsilon^3\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 t^3+\cdots\right)\frac{d^2u}{dt^2}\\ &=\left(-\frac{d^3u}{dt^3}+\frac{du}{dt}\right)-\varepsilon\frac{\pi t}{2}\frac{d^2u}{dt^2}+\cdots.\end{aligned}$$

故有
$$M_0u\equiv-\frac{d^3u}{dt^3}+\frac{du}{dt}$$
$$R_{1,0}u=-\frac{\pi}{2}t\frac{d^2u}{dt^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

类似地,在 $x=1$ 附近将算子作第二次分解. 设 $1-x=\varepsilon t_1$, 并将 $\sin\frac{\pi}{2}x$ 在 $x=1$ 附近展开,得到
$$\varepsilon L[u]\equiv\frac{d^3u}{dt_1^3}-\frac{d^2u}{dt_1^2}-\frac{du}{dt_1}+\varepsilon^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2t_1^2\frac{d^2u}{dt_1^2}+\cdots,$$
故有
$$M_1u\equiv\frac{d^3u}{dt_1^3}-\frac{d^2u}{dt_1^2}-\frac{du}{dt_1},$$
$$R_{1,1}u\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2t_1^2\frac{d^2u}{dt_1^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由(2.46)和(2.48)知 $v_0^{(0)}$, $v_0^{(1)}$ 应是下面初值问题的解:
$$M_0v_0^{(0)}\equiv-\frac{d^3v_0^{(0)}}{dt^3}+\frac{dv_0^{(0)}}{dt}=0,$$
$$\left.\frac{dv_0^{(0)}}{dt}\right|_{t=0}=-1;$$
$$M_1v_1^{(0)}\equiv\frac{d^3u}{dt_1^3}-\frac{d^2u}{dt_1^2}-\frac{du}{dt_1}=0,$$
$$v_0^{(1)}\big|_{t_1=0}=-w_0\big|_{x=1}=-1$$
(应注意,此时 $\bar{k}_1=1,\ \bar{k}_2=0,\ \bar{l}_1=\bar{l}_2=1$).

第一个方程和第二个方程的特征方程分别是
$$\lambda Q_0(\lambda)=\lambda(-\lambda^2+1)=0,$$
$$\mu Q_1(\mu)=\mu(\mu^2-\mu-1)=0.$$
它们有根 $\qquad\lambda_1=1,\qquad\lambda_2=-1;$
$$\mu_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad\mu_2=\frac{-\sqrt{5}+1}{2}.$$

因此各有一个负的实根．按正则退化的定义，这一奇异摄动问题是正则退化的．$v_0^{(0)}$，$v_0^{(1)}$ 有以下形式

$$v_0^{(0)}=\exp(-t)=\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$v_0^{(1)}=-\exp\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}t_1\right)$$

$$=-\exp\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\frac{1-x}{\varepsilon}\right),$$

相应地（$\bar{k}_1=1$，$\bar{k}_2=0$），

$$\bar{v}_0^{(0)}=\varepsilon v_0^{(0)}=\varepsilon\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

$$\bar{v}_0^{(0)}=\varepsilon^0 v_0^{(1)}=-\exp\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1-x}{\varepsilon}\right).$$

它们都是边界层函数，利用平滑函数将它们"粘合"起来，并记为 v_0:

$$v_0=\psi(4x)\bar{v}_0^{(0)}+\psi(4(1-x))\bar{v}_0^{(1)}$$

$$=\varepsilon\psi(4x)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)-\psi(4(1-x))$$

$$\times\exp\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1-x}{\varepsilon}\right).$$

于是得到奇异摄动问题的一次近似

$$U=w_0+v_0=x+\varepsilon\psi(4x)\exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$-\psi(4(1-x))\exp\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{1-x}{\varepsilon}\right).$$

利用前面的一般讨论可以求得这一问题的高次近似，此时

$$N=n+l-\min(\bar{l}_1,\ \bar{l}_2)=n+2-1=n+1.$$

§3 摄动问题的一致可解性

在前面两节我们讨论了柯西问题和边值问题解的渐近表示，这些讨论都是在：1) 摄动问题一致可解、2) 退化问题有唯一解、3)摄动问题正则退化这三个条件下进行的．在这一节我们要给出摄动问题一致可解的充分条件，在下一节将讨论在什么条件下保证退化是正则的，给出正则退化的代数判别法则.

在这一节和下一节所讨论的内容都可推广到偏微分方程情形，也是为讨论偏微分方程作的准备.

3-1 微分方程问题的提法 在区间 $0<x<1$ 内求函数 $u_\varepsilon=u_\varepsilon(x)$ 满足微分方程

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \sum_{j=1}^{l} \varepsilon^j a_{k+j}(x) \frac{d^{k+j}u}{dx^{k+j}} + \sum_{s=0}^{k} a_s(x) \frac{d^s u}{dx^s} = h(x) \quad (3.1)$$

$$(a_{k+l}(x) \neq 0)$$

和边界条件(2.2)及(2.3)．这一边值问题，和以前一样，我们称它为摄动问题 A_ε.

为了给出摄动问题 A_ε 一致可解的充分条件，我们将边界条件(2.2)和(2.3)根据 $k+l$ 是奇数还是偶数这两种不同情况来重新提出.

1) $k+l=2(k_1+l_1)$——偶数.

此时在两个端点上给予相同多个边界条件

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1+l_1-1), \qquad (3.2)$$

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1+l_1-1). \qquad (3.3)$$

2) $k+l=2(k_1+l_1)+1$——奇数.

此时根据$(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)$的符号给出边界条件.

i. $(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)>0$.

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1+l_1), \tag{3.4}$$

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1+l_1-1). \tag{3.5}$$

ii. $(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)<0$.

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1+l_1-1), \tag{3.6}$$

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1+l_1). \tag{3.7}$$

当$k+l=2(k_1+l_1)$是偶数时边界条件的提法是椭圆型方程第一边值问题在一维情形下的相似提法.当$k+l=2(k_1+l_1)+1$是奇数时，边界条件的提法是奇数阶《单一特征线》偏微分方程第一边值问题在一维情形下的相似提法. 关于单一特征线偏微分方程我们将在偏微分方程部分讨论.

边界条件作如上给定后，连同我们下面要提出的充分条件可以保证算子L_ε关于ε是一致正定的,即对一切$k+l$次连续可微并满足上述边界条件的函数u以及一切充分小的$\varepsilon>0$有

$$(L_\varepsilon u,\ u)\geqslant c_1\|u\|_1^2, \tag{3.8}$$

其中$c_1>0$是不依赖于ε和u的常数，$\|\ \ \|_1$是Banach空间B的范数,例如$B=W_2^{(p)}$.

如条件(3.8)成立,则问题A_ε对任意$h(x)\in L_2$是一致可解的. 事实上,边界条件的个数与微分方程的阶数相同,而正定性保证了问题解的唯一性，因此摄动问题解存在，并由(3.8)推得

$$\|u\|_1\leqslant c\|h\|, \tag{3.9}$$

其中 c 是与 ε 和 u 无关的正的常数. 所以由一致正定性推出摄动问题 A_ε 的一致可解性.

3-2 算子 L_ε 一致正定的充分条件 我们先将算子 L_ε 改写为

$$L_\varepsilon u \equiv \sum_{j=1}^{l} \varepsilon^j a_{k+j}(x) \frac{d^{k+j}u}{dx^{k+j}} + \sum_{s=1}^{k} a_s(x) \frac{d^s u}{dx^s} + a_0(x) u$$

$$\equiv L_\varepsilon^{(1)} u + L_0 u, \tag{3.10}$$

其中

$$L_\varepsilon^{(1)} u \equiv \sum_{j=1}^{l} \varepsilon^j a_{k+j}(x) \frac{d^{k+j}u}{dx^{k+j}}. \tag{3.11}$$

设

$$\Pi_\varepsilon(\xi; x) = \sum_{j=0}^{l} \varepsilon^j a_{k+j}(x) (i\xi)^{k+j}. \tag{3.12}$$

我们称它为算子 L_ε 在点 x 的特征型. 类似地, 称函数

$$\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi; x) = \sum_{j=1}^{l} \varepsilon^j a_{k+j}(x) (i\xi)^{k+j} \tag{3.13}$$

为算子 $L_\varepsilon^{(1)}$ 在点 x 的特征型.

定理 3 若 $k+l=2(k_1+l_1)$, $k=2k_1$ 都是偶数, 算子 $L_\varepsilon^{(1)}$ 的特征型 $\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi; x)$ 有正的实部, 即

$$\mathrm{Re}\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi; x) \equiv \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} (-1)^{k_1+j} a_{2(k_1+j)}(x) \xi^{2(k_1+j)}$$

$$\geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \xi^{2(k_1+j)}, \tag{3.14}$$

并且算子 L_0 是正定的, 即对满足边界条件(3.2)和(3.3)的任意光滑函数 u 有

$$(L_0 u, u) \geqslant \gamma^2 (\|D^{k_1} u\|^2 + \|u\|^2) \tag{3.15}$$

$$\left(D^i = \frac{d^i}{dx^i} \right),$$

则算子 L_ε 在边界条件(3.2), (3.3)下关于 ε 一致正定, 并有如下的能量估计:

$$\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2+\|D^{k_1}u\|^2+\|u\|^2\leqslant\bar{\beta}^2(L_\varepsilon u,\ u)\leqslant\bar{\beta}_1^2\|h\|^2,$$

$$h=L_\varepsilon u. \tag{3.16}$$

为了证明这一定理，我们先证明以下两个引理.

引理2 设算子 Λ_ε 是算子 L_ε 中含有系数 ε 的偶数阶导数的部分，即

$$\Lambda_\varepsilon u\equiv\varepsilon^{2l_1}a_{2(k_1+l_1)}(x)\frac{d^{2(k_1+l_1)}u}{dx^{2(k_1+l_1)}}+\cdots+\varepsilon^2a_{2k_1+2}(x)\frac{d^{2k_1+2}u}{dx^{2k_1+2}}, \tag{3.17}$$

并且它的特征型 $\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\xi,\ x)$，即 $\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi,\ x)$（参看(3.13)）的实部

$$\widetilde{\Pi}(\xi;x)=\mathrm{Re}\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)=\sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{k_1+j}\varepsilon^{2j}a_{2(k_1+j)}(x)\xi^{2(k_1+j)}$$

$$\geqslant\alpha^2\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\xi^{2(k_1+j)}, \tag{3.18}$$

其中 α^2 是既与 x 无关又与 ξ 无关的常数，则对于充分小的 ε 有下面不等式成立：

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u)\geqslant\beta^2\left[\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2\right]-M\varepsilon[\|D^{k_1}u\|^2+\|u\|^2], \tag{3.19}$$

其中 M 是一常数，u 是满足边界条件(3.2)和(3.3)的 $W_2^{2(k_1+l_1)}$ 中的任意一个函数.

证明 我们将证明分为四步来进行.

1° 首先假定系数 $a_i(x)=a_i$ 是常数.

设 $\tilde{u}(\xi)$ 是 $u(x)$ 的 Fourier 变换：

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi x}u(x)dx,$$

则 $D^ru=\dfrac{d^ru}{dx^r}$ 的 Fourier 变换为

$$(i\xi)^r\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi x}D^r u\,dx.$$

利用 Parseval 等式以及不等式(3.18)得到

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u)=(\tilde{\Pi}_\varepsilon(\xi)\tilde{u}(\xi),\ \tilde{u}(\xi))\geqslant\alpha^2\sum_{j=1}^{l_1}(\varepsilon^{2j}\xi^{2(k_1+j)}\tilde{u},\ \tilde{u})$$

$$=\alpha^2\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2. \qquad (3.20)$$

这一不等式对任意一个有限支集函数都成立，从而得到估计式(3.19).

2° $a_i(x)$是变系数的情形.

设函数 $w=w(x)$ 是在区间 $(\gamma,\ \gamma+\delta)\subset[0,\ 1]$ 外部为零的光滑函数，我们用 $\Omega^0(\gamma,\ \gamma+\delta)$来表示这些函数的全体.

设 Λ_ε^0 是在算子 Λ_ε 中将其系数 $a_i(x)$ 取为 $a_i(x)$ 在 $x=x_0(\gamma<x_0<\gamma+\delta)$上的值 $a_i(x_0)$ 以后所得到的微分算子，则由(3.20)，对于任意 $w\in\Omega^0(\gamma,\ \gamma+\delta)$我们有

$$(\Lambda_\varepsilon w,\ w)=(\Lambda_\varepsilon^0 w,\ w)+((\Lambda_\varepsilon-\Lambda_\varepsilon^0)w,\ w)$$

$$\geqslant\alpha^2\left[\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}w\|^2\right]+((\Lambda_\varepsilon-\Lambda_\varepsilon^0)w,\ w). \qquad (3.21)$$

将不等式(3.21)右端的第二项进行分部积分直到 Λ_ε 中的导数阶数减半为止，得到

$$((\Lambda_\varepsilon-\Lambda_\varepsilon^0)w,\ w)=\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}(-1)^{k_1+j}(D^{k_1+j}w,\ D^{k_1+j}(\eta_{k_1+j}w)), \qquad (3.22)$$

其中

$$\eta_i(x)=a_{2i}(x)-a_{2i}(x_0). \qquad (3.23)$$

易证

$$D^s(\eta_s w)=\eta_s D^s w+\sum_{i=1}^{s}\binom{s}{i}\eta_s^{(i)}D^{s-i}w. \qquad (3.24)$$

我们可以利用它对(3.22)右端的每一项内积作出估计，从而得到

$$|(D^s w,\ D^s(\eta_s w))| \leqslant |(\eta_s D^s w,\ D^s w)|$$
$$+\sum_{i=1}^{s}\binom{s}{i}|(D^s w,\ \eta_s^{(i)} D^{s-i} w)| \leqslant \omega_\delta[\|D^s w\|^2]$$
$$+c_0\left[\sum_{i=1}^{s}|(D^s w,\ \eta_s^{(i)} D^{s-i} w)|\right], \tag{3.25}$$

其中 $\omega_\delta = \max\limits_{\gamma\leqslant x\leqslant \gamma+\delta}|\eta_s| \quad (s=k_1+1,\ \cdots,\ k_1+l_1)$.

利用内积不等式

$$|(u,\ v)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\omega^2\|u\|^2+\frac{1}{\omega^2}\|v\|^2\right) \tag{3.26}$$

($\omega>0$ 是任意实数),

并设

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|a_{ij}^{(i)}(x)| = c \quad (j=k_1+l,\ \cdots,\ k_1+l_1;\ 1\leqslant i\leqslant j).$$

则 (3.27)

$$|(D^s w,\ \eta_s^{(i)} D^{s-i} w)| \leqslant \frac{1}{2}\left[\omega^2\|D^s w\|^2+\frac{1}{\omega^2}\|\eta_s^{(i)} D^{s-i} w\|^2\right]$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left[\omega^2\|D^s w\|^2+\frac{c^2}{\omega^2}\|D^{s-i} w\|^2\right] \tag{3.28}$$

$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$.

令 $\omega^2=\varepsilon$，当 $i\geqslant 1$ 时，我们有

$$\varepsilon^{2(s-k_1)}|(D^s w,\ \eta_s^{(i)} D^{s-i} w)| \leqslant \varepsilon\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{2(s-k_1)}\|D^s w\|^2\right)$$
$$+\frac{c^2}{2}\varepsilon^{2(s-k_1)-1}\|D^{s-i} w\|^2. \tag{3.29}$$

当 $s-i>k_1$，$i\geqslant 1$ 时，$\varepsilon^{2(s-k_1)-1}\leqslant \varepsilon\cdot\varepsilon^{2(s-i-k_1)}$ $(0<\varepsilon<1)$；当 $s-i\leqslant k_1$ 时，因为 $s>k_1$，所以 $\varepsilon^{2(s-k_1)-1}\leqslant\varepsilon$ $(0<\varepsilon<1)$。于是

由(3.25)和(3.29)当 $s>k_1$ 时得到

$$\varepsilon^{2(s-k_1)}|(D^s w,\ D^s(\eta_s w))| \leqslant (w_\delta + c_1\varepsilon)\varepsilon^{2(s-k_1)}\|D^s \omega\|^2$$

$$+c_1\varepsilon\left(\sum_{r=k_1+1}^{s-1}\varepsilon^{2(r-k_1)}\|D^r w\|^2+\sum_{\sigma=0}^{k_1}\|D^\sigma w\|^2\right). \qquad (3.30)$$

将(3.30)代入(3.22)并合并同类项,我们有

$$|((A_\varepsilon - A_\varepsilon^0)w,\ w)| \leqslant (\omega_\delta + c_2\varepsilon)\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}w\|^2$$

$$+c_j\varepsilon\sum_{\sigma=0}^{k_1}\|D^\sigma w\|^2. \qquad (3.31)$$

选取 ε 和 δ 使得 $\omega_\delta + c_2\varepsilon < \frac{\alpha^2}{2}$,则由(3.31)和(3.21)得到

$$(A_\varepsilon w,\ w) \geqslant \frac{\alpha^2}{2}\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}w\|^2 - \varepsilon c_3\sum_{\sigma=0}^{k_1}\|D^\sigma w\|^2. \quad (3.32)$$

因为

$$\|D^i w\|^2 \leqslant M_i\|D^{k_1}w\|^2 \quad (i \leqslant k_1). \qquad (3.33)$$

所以对于一切 $w(x)\in\Omega^0(\gamma,\ \gamma+\delta)$ 有估计式(3.19)成立.

注 不等式(3.33)的证明请参阅[16].

3° 设 $\Omega^0(0,\ 1)$ 是由靠近端点 $x=0$ 和 $x=l$ 为零的光滑函数 $u(x)$ 所组成的集合,现证不等式(3.19)对 $\Omega^0(0,\ 1)$ 中任意一个函数是成立的.

现表示在[0, 1]上等于1的函数为

$$1 \equiv \sum_{i=1}^{N}\zeta_i^2(x),\ x\in[\alpha,\ \beta]\subset(0,\ 1), \qquad (3.34)$$

其中$[\alpha,\ \beta]$是(0, 1)内任一闭子区间, $[\alpha,\ \beta]\subset(0,\ 1)$, $\zeta_i(x)$ 是只在区间$(\gamma_i,\ \gamma_i+\delta_i)$, $(\delta_i\leqslant\delta)$上异于零的光滑函数.

将算子 A_ε 作用在 $u(x)$ 上,我们有

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u)=\left(\sum_{i=1}^{N}\zeta_i^2(x)\Lambda_\varepsilon u,\ u\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{N}[(\Lambda_\varepsilon\zeta_i u,\ \zeta_i u)+B(u,\ \zeta_i)], \qquad (3.35)$$

其中 $B(u,\ \zeta_i)$ 包含有 u 及其导数，而导数的阶数比 $\sum(\Lambda_\varepsilon\zeta_i u,\ \zeta_i u)$ 中相应项的导数至少低一阶.

利用分部积分和在 2° 中所用过的相同的内积估计可得到

$$|B(u,\ \zeta_i)|\leqslant c\varepsilon\left[\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2\right]+c\varepsilon\left[\sum_{s=0}^{k_1}\|D^s u\|^2\right]. \qquad (3.36)$$

对(3.35)中 $\sum_{i=1}^{N}(\Lambda_\varepsilon\zeta_i u,\ \zeta_i u)$ 的每一项 $(\Lambda_\varepsilon\zeta_i u,\ \zeta_i u)$ 应用估计式(3.32)，并在(3.36)中取 ε 充分小使得 $c\varepsilon\leqslant\frac{\alpha^2}{4}$，我们得到

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u)\geqslant\frac{\alpha^2}{2}\sum_{j=1}^{l_1}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}(\zeta_i u)\|^2$$

$$-c_3\varepsilon\sum_{\sigma=0}^{k_1}\sum_{i=1}^{N}\|D^\sigma(\zeta_i u)\|^2$$

$$-c\varepsilon\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2-c\varepsilon\sum_{s=1}^{k_1}\|D^s u\|^2. \qquad (3.37)$$

因为 $\quad \|D^{k_1+j}\zeta_i u\|^2\geqslant\|\zeta_i D^{k_1+j}u\|^2-c_1\sum_{r=1}^{k_1+j}\|D^{k_1+j-r}u\|^2,$

所以由(3.37)推得

$$(\Lambda_\varepsilon u,\ u)\geqslant\frac{\alpha^2}{2}\sum_{j=1}^{l_1}\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^{2j}\|\zeta_i D^{k_1+j}u\|^2$$

$$-c_2\varepsilon\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2-c_4\varepsilon\sum_{s=1}^{k_1}\|D^s u\|^2, \qquad (3.38)$$

取 ε 充分小使得 $c_2\varepsilon\leqslant\frac{\alpha^2}{4}$，根据表达式(3.34)以及估计式(3.33)就得到我们所要的结果.

4° 最后证明估计式(3.19)对一切满足边界条件(3.2), (3.3)的 $u \in W_2^{2(k_1+l_1)}$ 都成立.

因为 $u \in W_2^{2(k_1+l_1)}$ 并且满足边界条件(3.2)和(3.3), 故有 $(A_\varepsilon u, u) = \sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{k_1+j}\varepsilon^{2j}(D^{k_1+j}u, D^{k_1+j}(a_{2(k_1+j)}u))$. 因此, 如能证得

$$\sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{k_1+j}\varepsilon^{2j}(D^{k_1+j}u, D^{k_1+j}(a_{2(k_1+j)}u))$$

$$+M\varepsilon(\|D^{k_1}u\|^2+\|u\|^2) \geqslant \beta^2\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2, \quad (3.39)$$

即得估计式(3.19)。

从泛函分析中知道, 对于 $W_2^{2(k_1+l_1)}$(实际上要求 $u \in W_2^{(k_1+l_1)}$ 即够)中任意一个满足边界条件(3.2)和(3.3)的函数 $u(x)$ 可以构造函数序列 $\{u_n(x) = J_\eta(\zeta_n u)\}$: i. $u_n \in \Omega^0(0, 1)$; ii. $u_n \xrightarrow{W_2^{(k_1+l_1)}} u(n\to\infty)$, 其中 ζ_n 是在区间 $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ 和区间 $\left[1-\frac{1}{n}, 1\right]$ 内等于零的光滑函数, J_η 是半径为 $\eta=\frac{1}{2n}$ 的平均算子.

根据我们在 3° 中的讨论不等式(3.39)对于 $u_n(x)$ 是成立的, 现将 $u_n(x)$ 代入(3.39)并取极限$(n\to\infty)$, 从而对于上述的 u 有(3.21)成立.

至此, 引理 2 完全得证.

引理 3 设 M_ε 是算子 L_ε 中含有系数 ε 的奇数阶导数项之和:

$$M_\varepsilon u \equiv \sum_{j=0}^{l_1-1}\varepsilon^{2j+1}a_{2(k_1+j)+1}\frac{d^{2(k_1+j)+1}u}{dx^{2(k_1+j)+1}}, \quad (3.40)$$

u 是满足边界条件(3.2)和(3.3) $W_2^{2(k_1+l_1)}$ 空间中的函数, 则

$$(M_\varepsilon u,\ u)\geqslant -c\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{l_1-1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2+\|D^{k_1}u\|^2+\|u\|^2\right). \tag{3.41}$$

证明 我们先考虑(3.40)中最高阶导数项 $\varepsilon^{2l_1-1}a_{2(k_1+l_1)-1}\cdot D^{2(k_1+l_1)-1}u$. 将它和 u 作内积, 利用边界条件(3.2)和(3.3)进行分部积分, 得到

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2l_1-1}(a_{2(k_1+l_1)-1}D^{2(k_1+l_1)-1}u,\ u)\\&=\frac{1}{2}\ \varepsilon^{2l_1-1}(-1)^{k_1+l_1-1}\int_0^1\frac{d}{dx}[a_{2(k_1+l_1)-1}(D^{k_1+l_1-1}u)^2]dx\\&\quad+\varepsilon^{2l_1-1}\sum_{j<k_1+l_1-1}(b_jD^{k_1+l_1-1}u,\ D^ju),\end{aligned} \tag{3.42}$$

其中 $b_j(x)$是有界函数, 除常数因子外, 它等于系数 $a_{2(k_1+l_1)-1}$ 的导数, 此导数的阶 $\leqslant k_1+l_1-1$.

根据边界条件(3.2)和(3.3), (3.42)中的第一项为零, 而第二项和式按我们前面同样的证法可有

$$\begin{aligned}&\left|\varepsilon^{2l_1-1}\sum_{j<k_1+l_1-1}(b_jD^{k_1+l_1-1}u,\ D^ju)\right|\\&\leqslant c_1\varepsilon\left[\sum_{j=1}^{l_1-1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2+\|D^{k_1}u\|^2+\|u\|^2\right].\end{aligned}$$

对 $M_\varepsilon u$ 中其他项亦有类似的估计, 从而得到引理 3 的论断.

有了这两个引理, 我们可以证明定理 3.

设 u 是满足边界条件(3.2)和(3.3) $W_2^{2(k_1+l_1)}$ 中的任意一个函数, 则由引理 2 和引理 3 的结果 (3.19)、(3.41) 和算子 L_0 的正定条件(3.15)推得

$$\begin{aligned}(L_\varepsilon u,\ u)&=(\Lambda_\varepsilon u,\ u)+(M_\varepsilon u,\ u)+(L_0u,\ u)\\&\geqslant(\beta^2-c\varepsilon)\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2\\&\quad+(\gamma^2-M\varepsilon-c\varepsilon)(\|u\|^2+\|D^{k_1}u\|^2).\end{aligned}$$

取 ε 适当小，使得 $\beta^2-c\varepsilon\geqslant\beta_1^2>0$，$\gamma^2-M\varepsilon-c\varepsilon\geqslant\beta_1^2>0$，从而就得到不等式(3.16)的第一部分，即

$$\bar{\beta}^2(L_\varepsilon u,\ u)\geqslant\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\|D^{k_1+j}u\|^2+\|D^{k_1}u\|+\|u\|^2,$$

其中 $\bar{\beta}^2=1/\beta_1^2$.

另一方面，按内积不等式(3.26)以及原方程 $L_\varepsilon u=h$，我们有

$$(L_\varepsilon u,\ u)=(h,\ u)\leqslant\frac{1}{2}\left(\omega^2\|u\|^2+\frac{1}{\omega^2}\|h\|^2\right).$$

从而得到估计式(3.16)的第二部分. 于是定理 3 得证.

定理 3 讨论的是 $k+l=2(k_1+l_1)$，$k=2k_1$ 的情形，对于 $k=2k_1+1$，即 k 是奇数时亦有类似的结果.

定理 3′ 若 $k+l=2(k_1+l_1)$是偶数，而 $k=2k_1+1$ 是奇数，算子 $L_\varepsilon^{(1)}$ 的特征型 $\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)$有正的实部，即

$$\operatorname{Re}\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)=\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}(-1)^{k_1+j}a_{2(k_1+j)}(x)\xi^{2(k_1+j)}$$

$$\geqslant\alpha^2\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}\xi^{2(k_1+j)},\tag{3.43}$$

并且算子 L_0 在(3.15)意义下是正定的，则算子 L_ε 在边界条件(3.2)，(3.3)下对于充分小的 ε 一致正定，并有如下的能量估计：

$$\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}\|D^{k_1+j}u\|^2+\|D^{k_1}u\|^2+\|u\|^2$$

$$\leqslant\bar{\beta}^2(L_\varepsilon u,\ u)\leqslant\bar{\beta}_1^2\|h\|^2.\tag{3.44}$$

为了证明这一定理，亦有类似于引理 2 和引理 3 的两个引理.

引理 2′ 设算子 Λ_ε 是算子 L_ε 中含有系数 ε 的偶数阶导数的部分，即

$$\Lambda_\varepsilon u \equiv \varepsilon^{2l_1-1} a_{2(k_1+l_1)} D^{2(k_1+l_1)} u + \cdots + \varepsilon a_{2k_1+2}(x) D^{2(k_1+1)} u, \tag{3.17'}$$

并且它的特征型 $\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\xi;x)$，即 $\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)$的实部

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\xi;x) = \mathrm{Re}\,\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x) = \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1}(-1)^{k_1+j} a_{2(k_1+j)}(x)\xi^{2(k_1+j)}$$

$$\geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1}\xi^{2(k_1+j)}, \tag{3.18'}$$

则对于充分小的 ε 有下面不等式成立：

$$(\Lambda_\varepsilon u, u) \geqslant \beta^2\left[\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1}\|D^{k_1+j}u\|^2\right] - M\varepsilon[\|D^{k_1}u\|^2 + \|u\|^2], \tag{3.19'}$$

其中 M 是一常数，u 是满足边界条件(3.2)和(3.3)的 $W_2^{(2(k_1+l_1))}$ 中的任意一个函数.

引理 3′ 设 M_ε 是算子 L_ε 中含有系数 ε 的奇数阶导数项之和：

$$M_\varepsilon u \equiv \sum_{j=1}^{l_1-1} \varepsilon^{2j} a_{2(k_1+j)+1}(x) D^{2(k_1+j)+1} u, \tag{3.40'}$$

$u \in W_2^{(2(k_1+l_1))}$ 并满足边界条件(3.2)和(3.3)，则

$$(M_\varepsilon u, u) \geqslant -c\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{l_1-1} \varepsilon^{2j-1}\|D^{k_1+j}u\|^2 + \|D^{k_1}u\|^2 + \|u\|^2\right). \tag{3.41'}$$

定理 2′，**引理 2′**，**引理 3′** 的证明和定理 2，引理 2，引理 3 相似.

现讨论 $k+l=2(k_1+l_1)+1$ 是奇数的情形. 由于边界条件需根据 $a_{2(k_1+l_1)+1}(x)$ 的符号来给定，将有不同结果. 现分列如下：

定理 4 设 $k+l=2(k_1+l_1)+1$. 当 $k=2k_1$ 是偶数时，若算子 $L_\varepsilon^{(1)}$ 的特征型 $\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)$有正的实部，即

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\xi; x) = \operatorname{Re}\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi; x) = \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j}(-1)^{k_1+j} a_{2(k_1+j)}(x) \xi^{2(k_1+j)}$$

$$\geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \xi^{2(k_1+j)}, \tag{3.14}$$

并且算子 L_0 在(3.15)意义下是正定的，则算子 L_ε 在边界条件(3.4)和(3.5)(当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)>0$ 时)或边界条件(3.6)和(3.7)(当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)<0$ 时)下对于充分小的 ε 是一致正定的，并有估计式(3.16).

为了证明这一定理亦需要两个引理分别对 $(\Lambda_\varepsilon u, u)$ 和 $(M_\varepsilon u, u)$ 作出估计，但第一个引理与引理 2 完全相同，$\Lambda_\varepsilon u$ 即(3.17)，只是考虑的函数 u 应满足边界条件(3.4)和(3.5)(当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)>0$ 时)或边界条件(3.6)和(3.7)(当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)<0$ 时)并且属于 $W_2^{(2(k_1+l_1)+1)}$.

第二个引理与引理 3 有些不同，现叙述之并给出证明.

引理 4 设 M_ε 是 L_ε 中含有系数 ε 的奇数阶导数之和：

$$M_\varepsilon u \equiv \sum_{j=0}^{l_1} \varepsilon^{2j+1} a_{2(k_1+j)+1}(x) D^{2(k_1+j)+1} u,$$

$$u \in W_2^{(2(k_1+l_1)+1)}. \tag{3.45}$$

当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)>0$ 时，u 应满足边界条件(3.4)和(3.5). 此时 $(M_\varepsilon u, u)$ 有如下估计：

$$(M_\varepsilon u, u) \geqslant \frac{1}{2}(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1}(1) \varepsilon^{2l_1+1} |D^{k_1+l_1} u(1)|^2$$

$$- c\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \|D^{k_1+j}u\|^2 + \|D^{k_1}u\|^2 + \|u\|^2\right); \tag{3.46}$$

当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)>0$ 时，u 应满足边界条件(3.6)和(3.7). 此时 $(M_\varepsilon u, u)$ 有如下估计：

$$(M_\varepsilon u,\ u) \geqslant \frac{1}{2}(-1)^{k_1+l_1+1} a_{2(k_1+l_1)+1}(0)\, \varepsilon^{2l_1+1} |D^{(k_1+l_1)} u(0)|^2$$

$$- c\varepsilon\left(\sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} \|D^{k_1+j} u\|^2 + \|D^{k_1} u\|^2 + \|u\|^2\right). \quad (3.47)$$

证明 类似于引理 3 的证明，此时 $M_\varepsilon u$ 中的最高阶导数项为 $\varepsilon^{2l_1+1} a_{2(k_1+l_1)+1} D^{2(k_1+l_1)+1} u$，它与 u 的内积

$$\varepsilon^{2l_1+1}(a_{2(k_1+l_1)+1} D^{2(k_1+l_1)+1} u,\ u)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{2l_1+1} (-1)^{k_1+l_1} \int_0^1 \frac{d}{dx} [a_{2(k_1+l_1)+1} (D^{k_1+l_1} u)^2] dx$$

$$+ \varepsilon^{2l_1+1} \sum_{j<k_1+l_1} (b_j D^{k_1+l_1} u,\ D^j u), \quad (3.48)$$

其中 $b_j(x)$ 是有界函数，除常数因子外，它等于系数 $a_{2(k_1+l_1)+1}(x)$ 的导数，此导数的阶数 $\leqslant k_1+l_1$.

在(3.48)分别利用边界条件(3.4)，(3.5)和(3.6)，(3.7)即得到(3.46)和(3.47)中右边的第一项，根据我们的假定它们都是正的，对于(3.48)中第二项和式的估计和引理 2 类似. 至于$(M_\varepsilon u,\ u)$中其他各项的估计利用同样的分部积分和对内积估计的方法得到，不再赘述.

定理 4′ 设 $k+l=2(k_1+l_1)+1$. 当 $k=2k_1+1$ 是奇数时，若算子 $L_\varepsilon^{(1)}$ 的特征型 $\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)$ 有正的实部，即

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\xi;x) = \mathrm{Re}\,\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)$$

$$= \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1} (-1)^{k_1+j} a_{2(k_1+j)}(x) \xi^{2(k_1+j)}$$

$$\geqslant \alpha^2 \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1} \xi^{2(k_1+j)}, \quad (3.43)$$

并且算子 L_0 在(3.15)意义下是正定的，则算子 L_ε 在边界条件(3.4)和(3.5)（当$(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1}(x) > 0$ 时）或边界条件(3.6)和(3.7)（当$(-1)^{k_1+l_1} a_{2(k_1+l_1)+1}(x) < 0$ 时）下对于充分小的 ε 是一致正定的，并有估计式(3.44).

为了证明这一定理亦需要有两个引理，对$(A_\varepsilon u, u)$和$(M_\varepsilon u, u)$作出估计，但第一个引理与引理 2′ 完全相同，$A_\varepsilon u$即(3.17′)只是$u\in W_2^{(2(k_1+l_1)+1)}$，并根据$a_{2(k_1+l_1)+1}(x)$的符号$u$应满足边界条件(3.4)和(3.5)或(3.6)和(3.7)。

关于第二个引理，此时

$$M_\varepsilon u \equiv \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j} a_{2(k_1+j)+1}(x) D^{2(k_1+j)+1} u. \tag{3.49}$$

对于$W_2^{(2(k_1+l_1)+1)}$中任意一个函数u在相应的边界条件下有类似于(3.46)和(3.47)的估计式成立，只是ε的最高次幂应改为ε^{2l_1}，最低次幂为ε^2. 证法与引理 4 相同，故从略.

因此，我们证明了若算子$L_\varepsilon^{(1)}$的特征型有正的实部(3.14)$(k=2k_1)$或(3.43)$(k=2k_1+1)$并且退化算子L_0是正定的，则算子L_ε一致正定，从而得到摄动问题A_ε的一致可解性.

应指出，条件(3.15)是退化问题A_0有唯一解的充分条件.

§4 正则退化的充分条件

为了构造摄动问题的渐近解，我们曾要求摄动问题A_ε当$\varepsilon=0$时正则退化为问题A_0，亦即要求特征方程

$$Q_0(\lambda)=\sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0}\lambda^r=0 \tag{4.1}$$

和特征方程

$$Q_1(\mu)=\sum_{r=0}^{l}(-1)^{k+r} a_{k+r,1}\mu^r=0 \tag{4.2}$$

分别有$\bar{l}_1$和$\bar{l}_2$个相异的根，并且这些根具有负的实数部分. 其中$\bar{l}_1$和$\bar{l}_2$是摄动问题退化时分别在$x=0$和$x=1$所失去

的边界条件的个数.

问题是，在什么条件下才能保证方程(4.1)和(4.2)的根具有上述性质?

根据摄动算子 L_ε 和退化算子 L_0 阶数的奇偶性现分四种情况来进行讨论.

4-1 L_ε 和 L_0 都是偶数阶算子: $k+l=2(k_1+l_1)$, $k=2k_1$. 根据前一节讨论, 摄动问题的边界条件由(3.2), (3.3)给出:

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1+l_1-1), \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{d^s u}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1+l_1-1), \tag{3.3}$$

退化问题 A_0 的边界条件现作如下给定:

$$\left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=0}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1-1), \tag{4.3}$$

$$\left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1-1), \tag{4.4}$$

边界条件这样给定后由算子 L_0 的正定条件(3.15)推出

$$(-1)^{k_1}a_{2k_1}(x)=(-1)^{k_1}a_k(x)>0. \tag{4.5}$$

现证明，在定理 3 的条件下，如退化问题 A_0 的边界条件按(4.3)和(4.4)给定，那末摄动问题 A_ε 的退化是正则的.

从给定的边界条件看，当摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0 时在 $x=0$ 和 $x=1$ 两端各失去 l_1 个边界条件，因此方程(4.1)和(4.2)应各有 l_1 个相异的根，并且这些根具有负的实数部分.

按假定，由(3.14)对于任意 $x\in[0,\ 1]$ 我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\xi;x)&=\mathrm{Re}\,\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;\ x)=\sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{k_1+j}\varepsilon^{2j}a_{2(k_1+j)}(x)\xi^{2(k_1+j)}\\&\geqslant c_1^{*}(\varepsilon^{2l_1}\xi^{2(k_1+l_1)}+\varepsilon^2\xi^{2(k_1+1)}).\end{aligned} \tag{4.6}$$

此外，根据(4.5)，$(-1)^{k_1}a_{2k_1}(x)>0$，所以由(3.12)得到

$$\operatorname{Re}\Pi_\varepsilon(\xi;x)=(-1)^{k_1}a_{2k_1}(x)\xi^{2k_1}+\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\xi;x)$$
$$\geqslant c^2(\xi^{2k_1}+\varepsilon^{2l_1}\xi^{2(k_1+l_1)}). \qquad (4.7)$$

将上式两端乘以 ε^{2k_1} 并令 $\varepsilon\xi=\eta$，我们有

$$\sum_{r=0}^{l_1}(-1)^{k_1+r}a_{2(k_1+r)}(x)\eta^{2(k_1+r)}\geqslant c^2(\eta^{2k_1}+\eta^{2(k_1+l_1)}). \qquad (4.8)$$

特别是，当 $x=0$ 时有下面不等式成立：

$$\sum_{r=0}^{l_1}(-1)^{k_1+r}a_{2(k_1+r),0}\eta^{2(k_1+r)}\geqslant c^2(\eta^{2k_1}+\eta^{2(k_1+l_1)}). \qquad (4.9)$$

在下一节的引理5我们将证明这一不等式保证方程(4.1)恰有 l_1 个根，它们的实数部分都是负的。

类似地，方程(4.2)也有同样的结果。

4-2　L_ε 是偶数阶算子：$k+l=2(k_1+l_1)$，而 L_0 是奇数阶算子 $k=2k_1+1$　此时摄动问题的边界条件还是按(3.2)和(3.3)给出，在 $x=0$ 和 $x=1$ 两端各有 k_1+l_1 个条件，退化问题的边界条件根据 $a_k(x)=a_{2k_1+1}(x)$ 的符号来给定。

我们假定退化算子 L_0 的最高阶导数项的系数

$$a_k(x)=a_{2k_1+1}(x)\neq 0.$$

1) 若 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}(x)>0$，则给出如下的边界条件：

$$\left.\frac{d^r w}{dx^r}\right|_{x=0}=0 \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1), \qquad (4.10)$$

$$\left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1-1). \qquad (4.11)$$

2) 若 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$，则边界条件是：

$$\left.\frac{d^r w}{dx^r}\right|_{x=0}=0 \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1-1), \qquad (4.12)$$

$$\left.\frac{d^s w}{dx^s}\right|_{x=1}=0 \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1). \qquad (4.13)$$

在第一种情况下，摄动问题退化时在端点 $x=0$ 失去 l_1-

1 个边界条件，在端点 $x=1$ 失去 l_1 个边界条件．共失去 $2l_1-1$ 个条件；在第二种情况下，分别在 $x=0$ 和 $x=1$ 失去 l_1 个和 l_1-1 个边界条件，也一共失去 $2l_1-1$ 个条件．

根据定理 3′ 的条件(3.43)，即 $L_\varepsilon^{(1)}$ 的特征型 $\Pi_\varepsilon^{(1)}(\xi;x)$ 有正的实部，得到

$$\varepsilon^{2k_1+1}\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\xi;x)=\sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{k_1+j}a_{2(k_1+j)}(x)\eta^{2(k_1+j)}$$
$$\geqslant c_1^2(\eta^{2(k_1+1)}+\eta^{2(k_1+l_1)}), \tag{4.14}$$

其中 $\eta=\varepsilon\xi$．

特别是，当 $x=0$ 时我们有

$$\sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{k_1+j}a_{2(k_1+j),0}\eta^{2(k_1+j)}\geqslant c_1^2(\eta^{2(k_1+1)}+\eta^{2(k_1+l_1)}). \tag{4.15}$$

在下一节的引理 6 我们将证明，条件(4.15)保证方程(4.1)和(4.2)当 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}(x)>0$ 时分别有 l_1-1 个和 l_1 个具有负的实数部分的根，当 $(-1)^k a_{2k_1+1}(x)<0$ 时分别有 l_1 个和 l_1-1 个具有上述性质的根．

4-3　L_ε 是奇数阶算子：$k+l=2(k_1+l_1)+1$，而 L_0 是偶数阶算子：$k=2k_1$　此时摄动问题的边界条件按(3.4)和(3.5)（当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)>0$ 时）或(3.6)和(3.7)（当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)<0$ 时）给出，而退化问题的边界条件按(4.3)和(4.4)给出．在前一种情况下当摄动问题退化时在端点 $x=0$ 将失去 l_1+1 个边界条件，在端点 $x=1$ 将失去 l_1 个，在后一种情况下失去边界条件的个数正好与前一种情形相反．

定理 4 中条件(3.14)就是我们在 4.1 所讨论过的条件，同样根据(4.5) $(-1)^{k_1}a_{2k_1}(x)>0$ 得到不等式(4.9)．

在下一节的引理 7 我们将证明，当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)=(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)>0$ 时条件(4.9)保证特征方程 $Q_0(\lambda)=0$ 有 l_1+1 个根在左半平面上，$Q_1(\mu)=0$ 有 l_1 个根在左半

平面上．当$(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}(x)=(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)<0$时两方程在左半平面上根的个数与前一种情形相反．

4-4　L_ε 是奇数阶算子：$k+l=2(k_1+l_1)+1$，L_0 也是奇数阶算子：$k=2k_1+1$　此时边界条件将按四种可能的情形给定．

1) $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}(x)>0$，$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)>0$．

摄动问题：(3.4)，(3.5)；

退化问题：(4.10)，(4.11)．

在 $x=0$ 失去 l_1 个边界条件，在 $x=1$ 也失去 l_1 个边界条件．

2) $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}(x)<0$，$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)<0$．

摄动问题：(3.6)，(3.7)；

退化问题：(4.12)，(4.13)．

在 $x=0$ 和 $x=1$ 各失去 l_1 个边界条件．

3) $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}(x)>0$，$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)<0$．

摄动问题：(3.6)，(3.7)；

退化问题：(4.10)，(4.11)．

在 $x=0$ 失去 l_1-1 个边界条件，在 $x=1$ 失去 l_1+1 个边界条件．

4) $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}(x)<0$，$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)>0$．

摄动问题：(3.4)，(3.5)；

退化问题：(4.12)，(4.13)．

在 $x=0$ 失去 l_1+1 个边界条件，在 $x=1$ 失去 l_1-1 个边界条件．

在下一节的引理 8 我们将根据定理 4′ 的条件利用条件 (4.15) 证明特征方程 $Q_0(\lambda)=0$，$Q_1(\mu)=0$ 的根具有所要求的性质．

因此，我们证得，定理 3，定理 3′，定理 4，定理 4′ 中所提条件是摄动问题正则退化的充分条件.

综合以上 § 3，§ 4 两节的讨论，我们得到下面一个定理：

定理 5 在定理 3, 3′, 4, 4′ 的条件下，若对于退化问题给定边界条件(4.3)，(4.4)，或(4.10)，(4.11)，或(4.12)，(4.13)，则 1) 摄动问题 A_ε 一致可解，2) 摄动问题 A_ε 正则退化为问题 A_0，3) 摄动问题 A_ε 的解 u_ε 有渐近表达式(2.58′).

§ 5 特征方程根的分布的代数基本引理

在上一节我们根据摄动算子 L_ε 和退化算子 L_0 阶数的奇偶性，按 § 4 定理 3, 3′, 4, 4′ 的假定以及边界条件的合理给定导出摄动问题 A_ε 正则退化的充分条件(4.9)和(4.15). 可以证明在这些条件下方程(4.1)和(4.2)具有负实数部分的根的个数恰与摄动问题退化时在 $x=0$ 和 $x=1$ 两端所失去的边界条件的个数是一致的. 在这一节我们来证明这一论断的正确性. 由于对方程(4.2)的证明是类似的，我们主要讨论方程(4.1).

为讨论方便起见，现将方程(4.1)改写为

$$Q^{(k,l)}(t)=\sum_{j=k}^{k+l}a_j t^{j-k}=0 \quad (a_k\neq 0,\ a_{k+l}\neq 0). \qquad (5.1)$$

此外，我们假定多项式 $t^kQ^{(k,l)}(t)$ 当 $t=i\xi$，$\mathrm{Im}\xi=0$ 时它的实部是正的，即

$$R_e(i\xi)^kQ^{(k,l)}(i\xi)=\sum_{k<2j<k+l}(-1)^j a_{2j}\xi^{2j}$$
$$\geqslant c^2(\xi^{2m}+\xi^{2M}). \qquad (5.2)$$

其中 $2m$, $2M$ 分别是偶数 $2j(k\leqslant 2j\leqslant k+l)$ 中的最小数和最大数, c 是常数.

条件(5.2)是条件(4.9)和(4.15)的一般形式, 在这条件下我们证明以下四个引理.

从(5.2)容易推得

$$(-1)^m a_{2m}>0, \quad (-1)^M a_{2M}>0. \tag{5.3}$$

5-1 方程(5.1)在零点附近和无穷远点附近的根 根据 Vieta 定理, 如果在方程(5.2)中令自由项 $a_k\to 0$, 固定其他系数 $a_j(j>k)$ 并认为 $a_{k+1}\neq 0$, 则方程(5.1)只有一个根 λ_0 随 a_k 趋于零而趋近于零, 并且

$$\lambda_0\approx -\frac{a_k}{a_{k+1}}, \ \mathrm{Re}\lambda_0\approx -\frac{a_k}{a_{k+1}}, \tag{5.4}$$

从而对于充分小的 a_k,

$$\mathrm{Sign}\ \mathrm{Re}\lambda_0=-\mathrm{Sign}\ \frac{a_k}{a_{k+1}}, \tag{5.5}$$

如果在方程(5.1)中令最高次项系数 $a_{k+l}\to 0$, 固定所有其余系数 $a_j(j<k+l)$, 那末当 $a_{k+l-1}\neq 0$ 时方程(5.1)有一根 μ_0 随 a_{k+l} 趋于零而趋于无穷, 并且

$$\mu_0\approx -\frac{a_{k+l-1}}{a_{k+l}}, \ \mathrm{Re}\mu_0\approx -\frac{a_{k+l-1}}{a_{k+l}}. \tag{5.6}$$

于是对于充分小的 a_{k+l}, 我们有

$$\mathrm{Sign}\ \mathrm{Re}\mu_0=-\mathrm{Sign}\ \frac{a_{k+l-1}}{a_{k+l}}. \tag{5.7}$$

5-2 四个引理

引理 5 设 $k+l=2(k_1+l_1)=2M$, $k=2k_1=2m$. 若条件(5.2)成立, 则方程(5.1)在左半平面上有 l_1 个根.

证明 此时多项式 $Q^{(k,l)}(t)$ 为:

$$Q^{(k,l)}(t)=Q^{(2k_1,2l_1)}(t)=\sum_{j=2k_1}^{2(k_1+l_1)}a_jt^{j-2k_1}$$
$$=\sum_{j=0}^{l_1}a_{2(k_1+j)}t^{2j}+t\sum_{j=0}^{l_1-1}a_{2(k_1+j)+1}t^{2j}. \qquad (5.1')$$

设

$$Q_2(t^2)=\sum_{j=0}^{l_1}a_{2(k_1+j)}t^{2j},\quad Q_3(t^2)=\sum_{j=0}^{l_1-1}a_{2(k_1+j)+1}t^{2j},$$

则(5.1′)改写为

$$Q^{(k,l)}(t)=Q_2(t^2)+tQ_3(t^2). \qquad (5.8)$$

引入参数 τ, 设

$$Q_\tau^{(k,l)}(t)=Q_2(t^2)+\tau tQ_3(t^2). \qquad (5.9)$$

当 $\tau=1$ 时即表达式(5.8), 根据(5.2), 在虚轴 $(t=i\xi)$ 上

$$(-1)^{k_1}\mathrm{Re}Q_\tau^{(k,l)}(i\xi)=(-1)^{k_1}Q_2(-\xi^2)$$
$$=\sum_{j=k_1}^{k_1+l_1}(-1)^ja_{2j}\xi^{2(j-k_1)}\geqslant c^2(1+\xi^{2l_1})>0,$$

由此可知, 方程

$$Q_\tau^{(k,l)}(t)=Q_2(t^2)+\tau tQ_3(t^2)=0 \qquad (5.10)$$

在虚轴上对任意实数 τ 都没有根. 因此, 若令 τ 在区间[0,1]上连续变化, 则方程(5.10)的根不会越过虚轴. 此外, 由于最高次项系数 $a_{2(k_1+l_1)}$ 固定并且异于零, 所以当 τ 变化时方程(5.10)的根不会远离到无穷远. 从而推得, 方程(5.10)在左半平面和右半平面上的根的个数不因 τ 的变化而改变.

取 $\tau=0$, 方程(5.10)为

$$Q_0^{(k,l)}(t)\equiv Q_2(t^2)=\sum_{j=0}^{l_1}a_{2(k_1+j)}t^{2j}=0.$$

它有 l_1 对根 λ_i, $-\lambda_i(i=1,2,\cdots,l_1)$, 从而在左半平面上恰有 l_1 个根. 根据上面讨论, 方程(5.8)$(\tau=1)$, 在左半平面上亦恰有 l_1 个根.

于是引理 5 得证.

应指出，关于方程(4.2)亦有同样结果，即在左半平面上有 l_1 个根. 证明方法类似，故从略.

引理 6 设 $k+l=2(k_1+l_1)$ 是偶数，$k=2k_1+1$ 是奇数. 若条件(5.2)成立，则当 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$ 时方程(5.1)在左半平面上有 l_1 个根；当 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$ 时方程(5.1)在左半平面上有 l_1-1 个根.

证明 此时多项式 $Q^{(k,l)}(t)$ 为：

$$Q^{(k,l)}(t)=Q^{(2k_1+1,2l_1-1)}(t)=\sum_{j=2k_1+1}^{2(k_1+l_1)}a_jt^{j-(2k_1+1)}$$

$$=t\sum_{j=1}^{l_1}a_{2(k_1+j)}t^{2(j-1)}+\sum_{j=1}^{l_1-1}a_{2(k_1+j)+1}t^{2j}+a_{2k_1+1}. \tag{5.1''}$$

设

$$Q_4(t^2)=\sum_{j=1}^{l_1}a_{2(k_1+j)}t^{2(j-1)},\quad Q_5(t^2)=\sum_{j=1}^{l_1-1}a_{2(k_1+j)+1}t^{2j},$$

则(5.1″)改写为

$$Q^{(k,l)}(t)=tQ_4(t^2)+Q_5(t^2)+a_{2k_1+1}, \tag{5.11}$$

根据(5.2)，在虚轴($t=i\xi$)上

$$\mathrm{Im}Q^{(k,l)}(i\xi)=\xi Q_4((i\xi)^2)=\xi\sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{j-1}a_{2(k_1+j)}\xi^{2(j-1)}\neq 0$$

$$(\xi\neq 0). \tag{5.12}$$

因此方程(5.1)，即方程(5.11)，当 $a_{2k_1+1}\neq 0$ 时在虚轴上无根.

由(5.3)，因为此时 $m=k_1+1$，故有

$$(-1)^{k_1+1}a_{2k_1+2}>0. \tag{5.13}$$

现固定所有系数 $a_s(s>2k_1+1)$，而令自由项 a_{2k_1+1} 变化. 当 $a_{2k_1+1}=0$ 时我们有

$$Q^{(k,l)}(t)\,|_{a_{2k_1+1}=0}=Q^{(2k_1+1,2l_1-1)}(t)\,|_{a_{2k_1+1}=0}$$

$$=tQ^{(2(k_1+1),2(l_1-1))}(t).$$

因此方程 $Q^{(k,l)}(t)\,|_{a_{2k_1+1}=0}=tQ^{(2(k_1+1),\,2(l_1-1))}(t)=0$ 有一个等于零的单根．而多项式

$$Q^{(2(k_1+1),\,2(l_1-1))}(t)=\sum_{j=2k_1+2}^{2(k_1+l_1)}a_jt^{j-(2k_1+2)}=\sum_{j=1}^{l_1}a_{2(k_1+j)}t^{2(j-1)}$$
$$+t\sum_{j=1}^{l_1-1}a_{2(k_1+j)+1}t^{2(j-1)}$$

在虚轴上，它的实部是

$$\mathrm{Re}Q^{(2(k_1+1),\,2(l_1-1))}(i\xi)=\sum_{j=1}^{l_1}(-1)^{j-1}a_{2(k_1+j)}\xi^{2(j-1)},$$

故由(5.2)和(5.12)推得，多项式 $Q^{(2(k_1+1),\,2(l_1-1))}(t)$ 在 $t=i\xi$ 上异于零．根据引理5，方程 $Q^{(2(k_1+1),\,2(l_1-1))}(t)=0$ 在左半平面上有 l_1-1 个根．因此多项式 $Q^{(2k_1+1,\,2l_1-1)}(t)$ 当 $a_{2k_1+1}=0$ 时在左半平面上有 l_1-1 个根．另外还有一个单根 $t=0$．

现令自由项 a_{2k_1+1} 分别沿正的实半轴和负的实半轴变化，当 a_{2k_1+1} 按绝对值充分小时，零根就接近于我们在5.1中所讨论过的小根 λ_0，故由(5.5)

$$\mathrm{Sign}\ \mathrm{Re}\lambda_0=-\mathrm{Sign}\,\frac{a_k}{a_{k+1}}=-\mathrm{Sign}\,\frac{a_{2k_1+1}}{a_{2k_1+2}}.$$

因为 $(-1)^{k_1+1}a_{2k_1+2}>0$（见(5.13)），所以

$$\mathrm{Sign}\ \mathrm{Re}\lambda_0=(-1)^{k_1}\mathrm{Sign}\,a_{2k_1+1}.$$

因此当 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$ 时小根 λ_0 位于左半平面上，当 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$ 时位于右半平面上．

当 a_{2k_1+1} 沿正的实半轴和负的实半轴继续变化而其他系数固定不变时，由(5.12)，方程(5.1)的根不可能越过虚轴并且由于最高次项系数 $a_{2(k_1+l_1)}\neq0$（由(5.3)），按5.1讨论此方程在无穷远点不可能有根．因此，当 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$ 时方程(5.1)在左半平面上有 l_1 个根，当 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$ 时在左半平面上有 l_1-1 个根．于是引理6得证．

应指出，方程(4.2)此时有以下形式

$$Q_1(\mu)=\sum_{j=1}^{2l_1}(-1)^{2k_1+j}a_{2k_1+j,1}\mu^{j-1}=0. \tag{5.14}$$

它的自由项是 $-a_{2k_1+1,1}=-a_{2k_1+1}(x)\big|_{x=1}$，根据刚证明的引理 6 当 $(-1)^{k_1}(-a_{2k_1+1,1})<0$ 时，即 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}(x)>0$ 时在左半平面上有 l_1 个根. 当 $(-1)^{k_1}(-a_{2k_1+1,1})>0$ 时，即 $(-1)^{k_1}\cdot a_{2k_1+1}(x)<0$ 时方程(5.14)在左半平面上有 l_1-1 个根.

引理 7 设 $k+l=2(k_1+l_1)+1$ 是奇数，$k=2k_1$ 是偶数. 若条件(5.2)成立，则当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}>0$ 时方程(5.1)在左半平面上有 l_1+1 个根，当 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}<0$ 时在左半平面上有 l_1 个根.

证明 将多项式 $Q^{(k,l)}(t)$ 改写为以下形式

$$\begin{aligned}Q^{(k,l)}(t)&=Q^{(2k_1,2l_1+1)}(t)=\sum_{j=2k_1}^{2(k_1+l_1)+1}a_jt^{j-2k_1}\\&=\sum_{j=2k_1}^{2(k_1+l_1)}a_jt^{j-2k_1}+a_{2(k_1+l_1)+1}t^{2l_1+1}\\&=Q^{(2k_1,2l_1)}(t)+a_{2(k_1+l_1)+1}t^{2l_1+1},\end{aligned} \tag{5.15}$$

固定所有系数 $a_s(2k_1\leqslant s\leqslant 2(k_1+l_1))$，而令最高次项系数 $a_{2(k_1+l_1)+1}$ 变化. 由(5.3)系数 $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)}>0(2M=2(k_1+l_1))$，从而根据我们在 5.1 中的讨论当 $a_{2(k_1+l_1)+1}\to 0$ 时方程 (5.1) 有一个根变为无穷，而其余的根都是有限的. 此外，当 $a_{2(k_1+l_1)+1}=0$ 时 $Q^{(2k_1,2l_1+1)}(t)=Q^{(2k_1,2l_1)}(t)=0$，根据引理 5，方程 $Q^{(2k_1,2l_1)}(t)=0$ 有 l_1 个根在左半平面上. 因此方程 $Q^{(2k_1,2l_1+1)}(t)=0$ 当 $a_{2(k_1+l_1)+1}=0$ 时在左半平面上亦有 l_1 个根.

现令最高次项系数 $a_{2(k_1+l_1)+1}$ 从 0 出发，分别沿正的实半轴和负的实半轴变化. 当 $a_{2(k_1+l_1)+1}$ 在 0 点附近时方程(5.1)除有 $2(k_1+l_1)$ 个有限根以外，还有一个大根 μ_0. 由(5.7)

$$\operatorname{Sign}\operatorname{Re}\mu_0 = -\operatorname{Sign}\frac{a_{2(k_1+l_1)}}{a_{2(k_1+l_1)+1}}. \tag{5.16}$$

因为$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)}>0$，所以(5.16)有以下形式

$$\operatorname{Sign}\operatorname{Re}\mu_0 = (-1)^{k_1+l_1+1}\operatorname{Sign}a_{2(k_1+l_1)+1}. \tag{5.17}$$

当$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}<0$ 时，我们有$(-1)^{k_1+l_1+1}a_{2(k_1+l_1)+1}>0$，故大根 μ_0 位于右半平面上，从而方程(5.1)在左半平面上一共有 l_1 个根．当$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}>0$ 时，我们有$(-1)^{k_1+l_1+1}\cdot a_{2(k_1+l_1)+1}<0$，由(5.17)，大根 μ_0 应位于左半平面上，此时方程(5.1)在左半平面上一共有 l_1+1 个根．

和前面讨论过的情形一样，当 $a_{2(k_1+l_1)+1}$ 继续变化时，方程(5.1)在左半平面上根的个数由于条件(5.2)是不会改变的，至此引理 7 得证．

应指出，此时方程(4.2)有以下形式

$$Q_1(\mu)=\sum_{j=0}^{2l_1+1}(-1)^{2k_1+j}a_{2k_1+j,1}\mu^j=0. \tag{5.18}$$

它的最高次项系数为

$$(-1)^{2l_1+1}a_{2(k_1+l_1)+1,1}=(-1)^{2l_1+1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)\,\big|_{x=1}.$$

根据刚才证明的引理 7，当$(-1)^{k_1+l_1}[(-1)^{2l_1+1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)]<0$，即$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)>0$ 时，方程(5.18)在左半平面上有 l_1 个根．同理，当$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}(x)<0$ 时在左半平面上有 l_1+1 个根．

引理 8 设 $k+l=2(k_1+l_1)+1$，$k=2k_1+1$，都是奇数．若条件(5.2)成立，则方程(5.1)在左半平面上根的分布为：

1) 当$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$，$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}>0$ 时有 l_1 个；

2) 当$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$，$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}<0$ 时有 l_1 个；

3) 当$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$，$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}<0$ 时有 l_1-1 个；

4) 当$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$, $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}>0$ 时有 l_1+1 个.

证明 方程(5.1)当 $k=2k_1+1$, $k+l=2(k_1+l_1)+1$ 时有如下形式:

$$Q^{(k,l)}(t)=Q^{(2k_1+1,\,2l_1)}(t)=\sum_{j=2k_1+1}^{2(k_1+l_1)+1}a_jt^{j-(2k_1+1)}. \qquad (5.1''')$$

我们将它改写为

$$Q^{(2k_1+1,\,2l_1)}(t)=Q^{(2k_1+1,\,2l_1-1)}(t)+a_{2(k_1+l_1)+1}t^{2l_1}. \quad (5.19)$$

现固定所有系数 $a_s(2k_1+1\leqslant s\leqslant 2(k_1+l_1))$, 令最高次项系数 $a_{2(k_1+l_1)+1}$ 变化. 根据(5.3), $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)}>0$ $(M=k_1+l_1)$. 因而当 $a_{2(k_1+l_1)+1}\to 0$ 时,根据我们在 5.1 中的讨论,方程(5.19)有一个根变为无穷,而其余的根都是有限的. 此时方程(5.19)变为方程 $Q^{(2k_1+1,\,2l_1-1)}(t)=0$. 这一方程正是我们已证明的引理 6 所讨论过的情形,当$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$ 时在左半平面上有 l_1-1 个根, 当$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$ 时在左半平面上有 l_1 个根. 因此方程(5.19)当 $a_{2(k_1+l_1)+1}=0$ 亦有同样结果.

当系数 $a_{2(k_1+l_1)+1}$ 在 0 点附近分别沿正的实半轴和负的实半轴变化时,大根 μ_0 根据(5.7)和$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)}>0$ 有如下的关系:

$$\operatorname{Sign}\operatorname{Re}\mu_0=-\operatorname{Sign}\frac{a_{2(k_1+l_1)}}{a_{2(k_1+l_1)+1}}=(-1)^{k_1+l_1+1}\operatorname{Sign}a_{2(k_1+l_1)+1},$$

由此推得, 当$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}>0$ 时 μ_0 有负的实数部分,而当$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}<0$ 时, μ_0 的实数部分是正的. 当 $a_{2(k_1+l_1)+1}$ 继续变化时根据条件(5.2)方程(5.19)的根不可能越过虚轴,故在左半平面上根的个数是不变的.

因此, 当$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$, $(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}>0$ 时方程

表 1.1

摄动方程的阶数		退化方程的阶数		摄动问题的边界条件个数		退化问题的边界条件个数		失去的边界条件个数	
				$x=0$	$x=1$	$x=0$	$x=1$	$x=0$	$x=1$
$k+l=2(k_1+l_1)$		$k=2k_1$		k_1+l_1 (3.2)	k_1+l_1 (3.3)	k_1 (4.3)	k_1 (4.4)	l_1	l_1
$k+l=2(k_1+l_1)$		$k=2k_1+1$	$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$	k_1+l_1 (3.2)	k_1+l_1 (3.3)	k_1+1 (4.10)	k_1 (4.11)	l_1-1	l_1
$k+l=2(k_1+l_1)$		$k=2k_1+1$	$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$	k_1+l_1 (3.2)	k_1+l_1 (3.3)	k_1 (4.12)	k_1+1 (4.13)	l_1	l_1-1
$k+l=2(k_1+l_1)+1$	$(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}>0$	$k=2k_1$		k_1+l_1+1 (3.4)	k_1+l_1 (3.5)	k_1 (4.3)	k_1 (4.4)	l_1+1	l_1
$k+l=2(k_1+l_1)+1$	$(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}<0$	$k=2k_1$		k_1+l_1 (3.6)	k_1+l_1+1 (3.7)	k_1 (4.3)	k_1 (4.4)	l_1	l_1+1
$k+l=2(k_1+l_1)+1$	$(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}>0$	$k=2k_1+1$	$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$	k_1+l_1+1 (3.4)	k_1+l_1 (3.5)	k_1+1 (4.10)	k_1 (4.11)	l_1	l_1
$k+l=2(k_1+l_1)+1$	$(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}>0$	$k=2k_1+1$	$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$	k_1+l_1+1 (3.4)	k_1+l_1 (3.5)	k_1 (4.12)	k_1+1 (4.13)	l_1+1	l_1-1
$k+l=2(k_1+l_1)+1$	$(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}<0$	$k=2k_1+1$	$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}>0$	k_1+l_1 (3.6)	k_1+l_1+1 (3.7)	k_1+1 (4.10)	k_1 (4.11)	l_1-1	l_1+1
$k+l=2(k_1+l_1)+1$	$(-1)^{k_1+l_1}a_{k+l}<0$	$k=2k_1+1$	$(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$	k_1+l_1 (3.6)	k_1+l_1+1 (3.7)	k_1 (4.12)	k_1+1 (4.13)	l_1	l_1

(5.19)在左半平面上有 $l_1-1+1=l_1$ 个根，从而第一种情形得到证明.

当 $(-1)^{k_1}a_{2k_1+1}<0$，$(-1)^{k_1+l_1}a_{2(k_1+l_1)+1}<0$ 时根据上面的讨论方程(5.19)在左半平面上有 $l_1+0=l_1$ 个根.

其余两种情形可类似地推得.

应指出，对于方程(4.2)

$$Q_1(\mu)=\sum_{j=0}^{2l}(-1)^{2k_1+1+j}a_{2k_1+1+j,1}\mu^j=0,$$

其自由项系数为 $-a_{2k_1+1}$，最高次项系数为 $-a_{2(k_1+l_1)+1}$. 因此在引理 8 中对于方程(5.1)(或(4.1)) $Q_0(\lambda)=0$ 成立的第一个结论应是方程(4.2)的第二个结论，而方程(5.1)的第二个结论应是方程(4.2)的第一个结论；方程(5.1)的第三个结论应是方程(4.2)的第四个结论，而方程(5.1)的第四个结论应是方程(4.2)的第三个结论.

为便于读者查阅，现将所讨论的各种情形列表于下(见表1.1).

§6　一般边界条件

在这一节我们讨论一般边界条件下的常微分方程边值问题. 介绍一下渐近解的构造方法.

在区间[0, 1]内解变系数常微分方程边值问题 A_ε:

$$L_\varepsilon u\equiv\sum_{j=0}^{k}a_j(x)\frac{d^ju}{dx^j}+\sum_{r=1}^{l}\varepsilon^r a_{k+r}(x)\frac{d^{k+r}u}{dx^{k+r}}=h(x),\quad(6.1)$$

$$l_iu\equiv\sum_{j=0}^{k+l-1}b_{ij}u^{(j)}(0)=\varphi_i\quad(i=1,2,\cdots,r),\qquad(6.2)$$

$$\gamma_mu\equiv\sum_{j=0}^{k+l-1}B_{mj}u^{(j)}(1)=\Phi_m\quad(m=1,2,\cdots,k+l-r),\qquad(6.3)$$

我们假定，摄动问题 A_ε 对于任意的 φ_i, Φ_m 以及充分小的 $\varepsilon(\varepsilon>0)$ 有唯一解.

先将边界条件(6.2)和(6.3)化为标准型，所谓标准型边界条件是指如下形式的边界条件:

$$\tilde{l}_i u \equiv u^{(n_i)}(0) + \sum_{j=0}^{n_1-1} c_{ij} u^{(j)}(0) = \tilde{\varphi}_i \quad (i=1, 2, \cdots, r)$$

$$(n_1 < n_2 < \cdots < n_r \leqslant k+l-1), \tag{6.4}$$

$$\tilde{\gamma}_m u \equiv u^{(N_m)}(1) + \sum_{j=0}^{N_1-1} c_{mj} u^{(j)}(1) = \tilde{\Phi}_m$$

$$(m=1, 2, \cdots, k+l-r)$$

$$(N_1 < N_2 < \cdots < N_{k+l-1} \leqslant k+l-1). \tag{6.5}$$

显然，若边界条件以(6.2)，(6.3)形式给出并且在(6.2)中导数 $n^{(n_1)}, u^{(n_2)}, \cdots, u^{(n_r)}$ 是高阶导数，而在(6.3)中 $u^{(N_1)}, u^{(N_2)}, \cdots, u^{(N_{k-l-1})}$ 是高阶导数，又这些高阶导数的系数所组成的子行列式异于零，则分别在(6.2)和(6.3)中可解出 $u^{(n_i)}$ $(i=1, 2, \cdots, r)$ 和 $u^{(N_j)}(j=1, 2, \cdots, k+l-r)$，因而边界条件(6.2)和(6.1)化为标准型(6.4)和(6.5).

现在来构造摄动问题(6.1)，(6.4)，(6.5)的渐近解. 基本迭代过程和前面相似，除算子 L_ε 的原来分解外，还需分别在 $x=0$ 和 $x=1$ 附近作第二次分解:

在 $x=0$ 附近，根据(2.6)～(2.8)我们有

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^{-k}\left(M_0 u + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^j R_{j,0} u + \varepsilon^{N+1} R_{N+1,0} u \right). \tag{6.6}$$

其中

$$M_0 u \equiv \sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0} \frac{d^{k+r} u}{dt^{k+r}}, \tag{6.7}$$

$$R_{1,0} u \equiv \sum_{r=0}^{l} t a_{k+r,1,0} \frac{d^{k+r} u}{dt^{k+r}} + a_{k-1,0} \frac{d^{k-1} u}{dt^{k-1}}. \tag{6.8}$$

一般地，$R_{i,0} u (1 \leqslant i \leqslant N)$ 的含义与§1初值问题相同，$t = x/\varepsilon$.

在 $x=1$ 附近根据(2.12)～(2.13)我们有

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^{-k}\left(M_1 u + \sum_{j=1}^{N+1} \varepsilon^j R_{j,1} u\right), \tag{6.9}$$

其中

$$M_1 u \equiv \sum_{r=0}^{l} (-1)^{k+r} a_{k+r,1} \frac{d^{k+r} u}{dt_1^{k+r}}, \tag{6.10}$$

$R_{j,1}$ 类似于 $R_{j,0}(1 \leqslant j \leqslant N+1)$，$t_1 = \frac{x_1}{\varepsilon} = \frac{1-x}{\varepsilon}$.

边界算子(6.4)和(6.5)关于变量 t 和 t_1 分别有以下形式:

$$\tilde{\gamma}_i u \equiv \varepsilon^{-n_i}\left[\frac{d^{n_i} u}{dt^{n_i}} + \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{\varepsilon^{n_i}}{\varepsilon^j} c_{ij} \frac{d^j u}{dt^j}\right], \tag{6.11}$$

$$\tilde{\gamma}_m u \equiv \varepsilon^{-N_m}\left[(-1)^{N_m} \frac{d^{N_m} u}{dt_1^{N_m}} + \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{\varepsilon^{N_m}}{\varepsilon^j} c_{mj} (-1)^j \frac{d^j u}{dt_1^j}\right]. \tag{6.12}$$

我们构造此问题的渐近解为

$$\begin{aligned} u_\varepsilon = & (w_0 + \varepsilon w_1 + \cdots) + \varepsilon^\alpha (v_0^{(0)} + \varepsilon v_1^{(0)} + \cdots) \\ & + \varepsilon^\beta (v_0^{(1)} + \varepsilon v_1^{(1)} + \cdots), \end{aligned} \tag{6.13}$$

其中 $v_i^{(0)}$, $v_i^{(1)}$ 分别是 $x=0$ 和 $x=1$ 邻域内的边界层类型函数; α 和 β 下面再定出.

将(6.13)代入方程(6.1)和边界条件(6.4)和(6.5)并利用算子 L_ε 的第二次分解和边界算子(6.11), (6.12), 我们有

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv & \left(\sum_{j=0}^{k} a_j(x) \frac{d^j}{dx^j} + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r a_{k+r}(x) \frac{d^{k+r}}{dx^{k+r}}\right)(w_0 + \varepsilon w_1 + \cdots) \\ & + \varepsilon^{-k}\left(M_0 + \sum_{j=1}^{N+1} \varepsilon^j R_{j,0}\right) \varepsilon^\alpha (v_0^{(0)} + \varepsilon v_1^{(0)} + \cdots) \\ & + \varepsilon^{-k}\left(M_1 + \sum_{j=1}^{N+1} \varepsilon^j R_{j,1}\right) \varepsilon^\beta (v_0^{(1)} + \varepsilon v_1^{(1)} + \cdots) = h(x), \end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\tilde{l}_i u_\varepsilon \equiv \left(\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}} + \sum_{j=0}^{n_1-1} c_{ij} \frac{d^j}{dx^j} \right)(w_0 + \varepsilon w_1 + \cdots) \big|_{x=0}$$

$$+ \varepsilon^{\alpha - n_i} \left(\frac{d^{n_i}}{dt^{n_i}} + \sum_{j=0}^{n_1-1} \varepsilon^{n_i - j} c_{ij} \frac{d^j}{dt^j} \right)$$

$$\times (v_0^{(0)} + \varepsilon v_1^{(0)} + \cdots) \big|_{t=0} = \tilde{\varphi}_i \tag{6.15}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ r),$$

$$\tilde{\gamma}_m u_\varepsilon \equiv \left(\frac{d^{N_i}}{dx^{N_i}} + \sum_{j=0}^{N_1-1} c_{mj} \frac{d^j}{dx^j} \right)(w_0 + \varepsilon w_1 + \cdots) \big|_{x=1}$$

$$+ \varepsilon^{\beta - N_m} \left((-1)^{N_m} \frac{d^{N_m}}{dt_1^{N_m}} + \sum_{j=1}^{N_1-1} (-1)^j \varepsilon^{N_m - j} c_{mj} \frac{d^j}{dt^j} \right)$$

$$\times (v_0^{(1)} + \varepsilon v_1^{(1)} + \cdots) \big|_{t_1=0} = \tilde{\Phi}_m$$

$$(m = 1,\ 2,\ \cdots,\ k + l - r), \tag{6.16}$$

由(6.14)得到

$$L_0 w_0 \equiv \sum_{j=0}^{k} a_j(x) \frac{d^j w}{dx^j} = h(x), \tag{6.17}$$

$$M_0 v_0^{(0)} \equiv \sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0} \frac{d^{k+r} v_0^{(0)}}{dt^{k+r}} = 0, \tag{6.18}$$

$$M_1 v_0^{(1)} \equiv \sum_{r=0}^{l} (-1)^{k+r} a_{k+r,1} \frac{d^{k+r} v_0^{(1)}}{dt_1^{k+r}} = 0. \tag{6.19}$$

假定方程(6.18)的特征方程

$$\lambda^k Q_0(\lambda) = \lambda^k \sum_{r=0}^{l} a_{k+r,0} \lambda^r = 0,$$

有 s 个根 $-\lambda_1,\ -\lambda_2,\ \cdots,\ -\lambda_s$ 并且这些根具有负的实数部分 $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$，而方程(6.19)的特征方程

$$\mu^k Q_1(\mu) = \mu^k \sum_{r=0}^{l} (-1)^{k+r} a_{k+r,1} \mu^r = 0,$$

在左半平面上有 $l - s$ 个根 μ_j. 这样，方程(6.18)和(6.19)的通解有以下形式

$$v_0^{(0)} = \sum_{i=1}^{s} A_i e^{-\lambda_i t} = \sum_{i=1}^{s} A_i e^{-\frac{\lambda_i x}{\varepsilon}} \quad (0 < x < 1), \tag{6.20}$$

$$v_0^{(1)}=\sum_{j=1}^{l-s}B_je^{-\mu_jt_1}=\sum_{j=1}^{l-s}B_je^{-\frac{\mu_j(1-x)}{\varepsilon}}\quad(0<x<1).\quad(6.21)$$

至此，已清楚，应如何选取α和β以及方程(6.17)，(6.18)，(6.19)的边界条件以便得到正确的逐次近似过程．由(6.15)和(6.16)，我们取

$$\alpha=n_{r-s+1},\ \beta=N_\nu,\ \nu=k-(r-s)+1$$
$$=(k+l-r)-(l-s)+1,\quad(6.22)$$

此时有

$$\varepsilon^{\alpha-n_p}=O(\varepsilon),\ \ \varepsilon^{\beta-N_q}=O(\varepsilon)$$
$$(p=1,\ 2,\ \cdots,\ r-s)(q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-(r-s)).\quad(6.23)$$

从而在(6.15)和(6.16)中的第二个括号

$$\varepsilon^{\alpha-n_p}\left(\frac{d^{n_p}}{dt^{n_p}}+\cdots\right)(v_0^{(0)}+\cdots),p=1,2,\ \cdots,r-s$$

和

$$\varepsilon^{\beta-N_q}\left((-1)^{N_q}\frac{d^N}{dt_1^{N_q}}+\cdots\right)(v_0^{(1)}+\cdots),$$
$$q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-(r-s).$$

在第一次近似中都是可以舍去的$O(\varepsilon)$量．因此方程(6.17)的边界条件可取为

$$\tilde{l}_pw_0=\tilde{\varphi}_p\ (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r-s),\quad(6.24)$$
$$\tilde{\gamma}_qw_0=\tilde{\Phi}_q\ (q=1,\ 2,\ \cdots,\ k-(r-s)).\quad(6.25)$$

方程(6.16)和边界条件(6.24)，(6.25)构成与摄动问题A_ε相应的退化问题．由此可知，当问题A_ε退化时在端点$x=0$失去s个边界条件，在端点$x=1$失去$l-s$个边界条件，共失去l个边界条件．如果方程(6.18)和(6.19)的特征方程的根恰具有前述性质，那末退化是正则的．

在(6.15)中当$i=r-s+1,\ \cdots,\ r$时可得到方程(6.18)的边界条件．事实上，当$i=r-s+1$时，$\varepsilon^{\alpha-n_i}=\varepsilon^{n_i-n_i}=1$，由(6.15)得到

$$\left.\frac{d^{n_i}w_0}{dx^{n_i}}\right|_{x=0}+\left.\frac{d^{n_i}v_0^{(0)}}{dt^{n_i}}\right|_{t=0}=\tilde{\varphi}_i$$

或 $$\left.\frac{d^{n_i}v_0^{(0)}}{dt^{n_i}}\right|_{t=0}=\tilde{\varphi}_i-\left.\frac{d^{n_i}w_0}{dx^{n_i}}\right|_{x=0}\quad (i=r-s+1). \tag{6.26}$$

当 $i=r-s+2, \cdots, r$ 时 $\varepsilon^{n_i-\alpha}=O(\varepsilon)$，现以 $\varepsilon^{n_i-\alpha}(i=r-s+2, \cdots, r)$ 乘(6.15)两端，得到 $v_0^{(0)}$ 的其余几个边界条件：

$$\left.\frac{d^{n_{i_1}}v_0^{(0)}}{dt^{n_{i_1}}}\right|_{t=0}=0\quad (i_1=r-s+2, \cdots, r), \tag{6.27}$$

类似地，由(6.16)令 $m=k-(r-s)+1, \cdots, k+l-r$，则得到 $v_0^{(1)}$ 边界条件：

$$(-1)^{N_m}\left.\frac{d^{N_m}v_0^{(1)}}{dt_1^{N_m}}\right|_{t_1=0}+\left.\frac{d^{N_m}w_0}{dx^{N_m}}\right|_{x=1}$$

$$=\tilde{\Phi}_m\quad (m=k-(r-s)+1), \tag{6.28}$$

$$\left.\frac{d^{N_{m_1}}v_0^{(1)}}{dt_1^{N_{m_1}}}\right|_{t_1=0}=0\quad (m=k-(r-s)+1, \cdots, k+l-1). \tag{6.29}$$

将 $v_0^{(0)}$ 的表达式(6.20)，$v_0^{(1)}$ 的表达式(6.21)分别代入(6.26)，(6.27)，(6.28)和(6.29)即求得系数 A_i 和 B_j.

因此在第一次近似中求得 w_0 以后，分别解初值问题(6.18)，(6.26)，(6.27)和(6.19)，(6.28)，(6.29)即得到 $v_0^{(0)}$ 和 $v_0^{(1)}$，它们都是边界层类型函数.

和以前一样在(6.14)，(6.15)，(6.16)中比较 ε 幂的系数可得到高次近似，例如到 n 步为止，即可求得 $n+1$ 次近似. 从而求得摄动问题 A_ε 解的渐近表示：

$$u_\varepsilon=\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i w_i+\sum_{i=0}^{N}\varepsilon^i\bar{v}_i+\varepsilon^{n+1}Z_n,$$

其中 $\bar{v}_i=\psi(4x)\bar{v}_i^{(0)}+\psi(4(1-x))\bar{v}_i^{(1)}$，$\bar{v}_i^{(0)}=\varepsilon^\alpha v_i^{(0)}$，$\bar{v}_i^{(1)}=\varepsilon^\beta v_i^{(1)}$，$\psi(x)$ 是平滑函数，$N=n+k-\min(r-s, k-(r-s))$. 对余项可进行类似的估计.

第2章

偏微分方程奇异摄动问题

在上一章我们讨论了常微分方程奇异摄动问题，在这一章我们研究在高阶导数项含有小参数 ε 的偏微分方程奇异摄动问题，考察它的解当 $\varepsilon\to 0$ 时的渐近性态，提出类似于常微分方程问题的正则退化条件，分出一大类具有边界层现象的偏微分方程边值问题，并构造这类问题的渐近解。

§1 二阶椭圆型方程第一边值问题

1-1 例题 设在圆 $\bar{Q}$: $0\leqslant\rho\leqslant 1$ 内讨论下面第一边值问题：

$$\begin{cases} L_\varepsilon u\equiv \varepsilon^2\Delta u-u=h, & (1.1)\\ u|_{\rho=1}=0, & (1.2)\end{cases}$$

其中 $\varepsilon>0$，是小参数，Δ 是 Laplace 算子．当 $\varepsilon=0$ 时方程(1.1)退化为方程

$$L_0 w=-w=h. \tag{1.3}$$

$w=-h$ 是退化方程(1.3)的解．一般地，函数 $w=-h$ 不满足边界条件(1.2)，因此摄动问题的解 u_ε 和退化问题的解 w 的差 $u_\varepsilon-w$ 靠近边界 $\rho=1$ 关于小参数 ε 不是一个微小的量．实际上，这个差具有边界层性质．为了构造边界层函数，我们将方程(1.1)改写为极坐标(ρ,φ)的形式，并作变数代换 $\rho=1-r$，则有

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{1-r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{(1-r)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right) - u = h. \tag{1.4}$$

令

$$\bar{v} = u_\varepsilon - w, \tag{1.5}$$

则 $\bar{v}$ 满足方程

$$L_\varepsilon \bar{v} = -\varepsilon^2 \Delta w \tag{1.6}$$

及边界条件

$$\begin{aligned} \bar{v}\,|_{r=0} &= (u_\varepsilon - w)\,|_{r=0} = -w\,|_{r=0} \\ &= -w(0,\ \varphi) = h(0,\ \varphi). \end{aligned} \tag{1.7}$$

在算子 L_ε 中作伸长变换 $t = \dfrac{r}{\varepsilon}$，得到算子 L_ε 如下新的分解：

$$L_\varepsilon v \equiv Mv + \varepsilon R_1 v + \varepsilon^2 R_2 v + \cdots, \tag{1.8}$$

其中

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v,\quad R_1 v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t},\ \cdots. \tag{1.9}$$

而 Mv 是(1.8)中的主要部分，因此可取方程

$$Mv \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v = 0, \tag{1.10}$$

在边界条件(1.7)下的解作为 $\bar{v}$ 的一次近似．方程(1.10)是二阶常微分方程，它有两个特解，我们选取其中一个 $v = ce^{-t}$．利用边界条件(1.7)此解可表示为：

$$v = -w(0,\ \varphi)e^{-t} = -w(0,\ \varphi)e^{-\frac{r}{\varepsilon}}. \tag{1.11}$$

这是具有边界层性质的函数．如果我们将它乘上平滑函数 $\psi(\rho)$，并表示为：

$$v_\varepsilon = \psi(\rho)v = -\psi(\rho)w(0,\ \varphi)e^{-\frac{r}{\varepsilon}}, \tag{1.12}$$

那末 v_ε 在整个圆内都有定义．显然，$w + v_\varepsilon$ 满足边界条件(1.2)．此外，对于误差 $z = u_\varepsilon - w - v_\varepsilon$，我们有

$$L_\varepsilon z = h - h - \varepsilon^2 \Delta w + O(\varepsilon) = O(\varepsilon), \tag{1.13}$$

$$z|_{r=0}=0. \tag{1.14}$$

根据极大值原理，得到 $z=O(\varepsilon)$. 因此

$$u_\varepsilon=w+v_\varepsilon+z, \quad z=O(\varepsilon), \tag{1.15}$$

函数 $w+v_\varepsilon$ 是 u_ε 的一次近似.

如果不用方程(1.10)，而取方程

$$M^{(1)}v\equiv\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}-\frac{\partial v}{\partial r}\right)-v=0,$$

则在表达式(1.15)中余项 $z=O(\varepsilon^2)$.

1-2 二阶椭圆型方程第一边值问题 在平面区域 $Q+\Gamma$ 内解椭圆型方程第一边值问题

$$\begin{cases} L_\varepsilon u\equiv\varepsilon L_2 u+L_1 u=h(x,\ y), & (1.16)\\ u|_\Gamma=0, & (1.17)\end{cases}$$

其中

$$L_2 u\equiv a(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

$$+c(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+e(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+f(x,\ y)u, \tag{1.18}$$

$$L_1 u\equiv\frac{\partial u}{\partial x}-g(x,\ y)u, \tag{1.19}$$

Γ 是区域 Q 的边界，$\varepsilon>0$，是小参数. 我们称问题(1.16)，(1.17)为摄动问题 $A\varepsilon$.

现假定，在所讨论的区域 $Q+\Gamma$ 内

$$a(x,\ y)>0, \tag{1.20}$$

$$g(x,\ y)\geqslant\alpha^2>0. \tag{1.21}$$

如果方程(1.16)的系数和右端满足 Hölder 连续条件，根据(1.21)，可以证明，对于适当小的 ε，问题 A_ε 有唯一解[17].

问题 A_ε 属于奇异摄动问题，这类问题常产生于海洋

学[18]和磁流体动力学[19]，先后曾为 Wasow[20], Levinson[21], Вишик, Люстерник[1], Eckhaus, DE Jager[22], Bui An Ton[23], Frankena[24]等人研究过.

摄动问题(1.16)当 $\varepsilon=0$ 时退化为一阶偏微分方程. 我们讨论此方程的奇异摄动问题时应考虑以下两种情形:

1) 区域 Q 的边界 Γ 是一光滑曲线, 没有任何部分与算子 L_1 的特征线重合, 此时称 Γ 为非特征边界;

2) 边界 Γ 的一部分包含了算子 L_1 的特征线, 此时 Γ 称为特征边界.

在这一节我们主要研究非特征边界情形, 最后一节将给出特征边界的阐述.

我们称方程(1.16)的系数、右端和边界 Γ 为问题 A_ε 的参数. 如果这些参数 s 次可微, 那末我们说, 它们的光滑度是 s.

我们的目的是研究问题 A_ε 的解 u_ε 的渐近表示.

1-3 退化问题 当 $\varepsilon=0$ 时方程(1.16)退化为一阶偏微分方程

$$L_1w\equiv\frac{\partial w}{\partial x}-g(x,\ y)w=h(x,\ y). \qquad (1.22)$$

此方程的特征线是平行于 x 轴的一族直线 $y=\text{const}$. 为简单起见, 我们假定只有两条特征线 $y=y_0$ 及 $y=y_1(y_1>y_0)$ 与边界 Γ 相切, 使得区域 Q 位于 $y_0\leqslant y\leqslant y_1$ 长条内, 并设 $A(x_0,\ y_0)$, $B(x_1,\ y_1)$ 分别是特征线 $y=y_0$ 和 $y=y_1$ 与 Γ 相切的切点. 点 A 及 B 分 Γ 为两个部分: Γ_+ 和 Γ_-. 要求特征线 $y=c(y_0<c<y_1)$ 当 x 增大时先和 Γ_- 相交, 然后和 Γ_+ 相交, 并且和 Γ 的交角不等于 0 和 π, 见图 2.

设 Γ_+ 的方程为

$$\nu=\nu_+(y), \tag{1.23}$$

Γ_- 的方程为

$$\nu=\nu_-(y), \tag{1.24}$$

退化问题 A_0 是在初始条件

$$w|_{\Gamma_+}=w(\nu_+(y),\ y)=0 \tag{1.25}$$

下解方程(1.22)的 Cauchy 问题，它的解可表示为

$$w(x,\ y)=\int_{\nu_+(y)}^{x} e^{\int_t^x g(\tau,y)d\tau} h(t,\ y)dt. \tag{1.26}$$

现在来研究退化问题(1.22)，(1.25)的解(1.26)的性质.

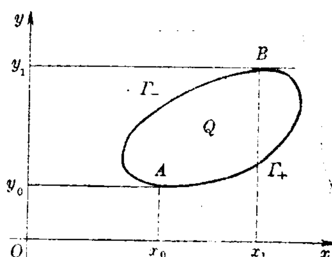


图 2

设边界 Γ 与特征线 $y=y_0$ 的切触度为 $p-1$，与特征线 $y=y_1$ 的切触度为 $q-1$，那末靠近点 $A(x_0,\ y_0)$ 我们有

$$\nu_+(y)-x_0=C\left[(y-y_0)^{\frac{1}{p}}+o(y-y_0)\right],$$

$$\frac{d\nu_+}{dy}=O\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}-1}\right),\quad \frac{d^2\nu_+}{dy^2}=O\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}-2}\right), \tag{1.27}$$

在点 $B(x_1,\ y_1)$ 的邻域内亦有类似的公式.

将表达式(1.26)关于变量 y 微分，在点 A 邻域内

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y}&=\int_{\nu_+(y)}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{\int_t^x g(\tau,y)d\tau}h(t,\ y)\right]dt\\&\quad -e^{\int_{\nu_+(y)}^{x}g(\tau,y)d\tau}h(\nu_+(y),\ y)\nu_+'(y)\\&=O(\nu_+'(y))=O\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}-1}\right),\end{aligned} \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=O(\nu_+''(y))=O\left((y-y_0)^{\frac{1}{p}-2}\right). \tag{1.29}$$

在点 B 邻域内亦有类似的公式. 因此退化问题的解 $w(x, y)$ 的导数在点 A 和点 B 的邻域内有奇性. 我们构造摄动问题 A_ε 渐近解时必须除去这两点的邻域. 如设 $V(C)$ 是点 C 的邻域, 则构造过程只在 $Q-V(A)-V(B)$ 内进行.

1-4 基本迭代过程 我们利用 Люстерник-Вишик 方法来构造问题(1.16), (1.17)的渐近解.

第一迭代过程和常微分方程情形完全类似. 我们构造问题 A_ε 的解为以下形式:

$$w_\varepsilon(x, y)=w_0(x, y)+\varepsilon w_1(x, y)+\cdots+\varepsilon^m w_m(x, y)+\cdots. \tag{1.30}$$

要求它满足方程(1.16)

$$L_\varepsilon w_\varepsilon=L_\varepsilon(w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^m w_m+\cdots)=h(x, y) \tag{1.31}$$

和边界条件(1.25)

$$w_i|_{\Gamma_+}=w_i(\nu_+(y), y)=0 \quad (i=0, 1, \cdots), \tag{1.32}$$

在(1.31)中合并同类项并令 ε^i 的所有项为零, 则得到 $W_i(i=0, 1, \cdots)$ 应满足的递推方程

$$L_1 w_0=h, \tag{1.33}$$

$$L_1 w_i=-L_2 w_{i-1}. \tag{1.34}$$

方程(1.33)就是退化方程, 所以 $w_0(x, y)$ 是退化问题的解, 方程(1.34)与(1.33)的差别只在于右端. 应指出, (1.34)的右端是二阶偏微分算子 L_2 对已求得的 w_i 作用的结果, 而 W_i 是一阶偏微分方程的解, 因此需要算子 L_1 的系数及其右端函数应充分光滑, 以保证迭代过程得以实现.

第二迭代过程, 即构造边界层校正项的过程, 由于所讨论的区域是一般区域, 需作仔细的研究.

方程(1.16)是二阶偏微分方程, 当 $\varepsilon=0$ 时退化为一阶偏

微分方程，在边界 Γ 的一部分 Γ_- 上失去边界条件

$$u_\varepsilon|_{\Gamma_-}=u_\varepsilon(\nu_-(y),\ y)=0,$$

因此在 Γ_- 的邻域内产生边界层现象. 为了要构造边界层校正项，我们在 Γ_- 的邻域内引进局部坐标系 (ρ,φ).

设 P 是边界 Γ_- 上的任意一点，从点 P 向区域 Q 内引边界 Γ_- 的长为 η 的内法线 $\overline{PR}$，要求 $\overline{PR}$ 与 x 轴相交成锐角 θ:

$$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}-l.$$

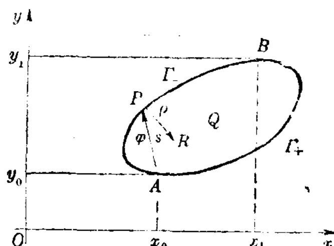


图 3

取 η 充分小使得 $\overline{PR}$ 在 Γ_- 的邻域内互不相交. 这样在 Γ_- 的邻域内形成一个 Q 的子区域 Q_η.

设 s 是 $\overline{PR}$ 上的任意一点. 令 ρ 等于 $\overline{PS}$ 的长，即沿内法线 $\overline{PR}$ 上点 P 到点 S 的距离，令 φ 是沿 Γ_- 从点 A 到点 P 的弧长 $\widehat{AP}$. 这样在 Q_η 内就建立了一个新的坐标系 $(\rho,\ \varphi)$. 新坐标系 $(\rho,\ \varphi)$ 与原来坐标系 $(x,\ y)$ 之间存在着一一对应的关系: $x=x(\rho,\ \varphi)$, $y=y(\rho,\ \varphi)$. 当 $\rho=0$ 时即得到边界 Γ_- 的参数方程 $x=x(0,\ \varphi)$, $y=y(0,\ \varphi)$. 我们假定边界 Γ_- 具有 $2m$ 阶光滑度. 在新的坐标系下，在 Γ_- 的邻域内算子 $L_\varepsilon u$ 可以表示为

$$\begin{aligned}L_\varepsilon u\equiv\varepsilon\Big\{&\alpha(\rho,\varphi)\frac{\partial^2u}{\partial\rho^2}+2\beta(\rho,\ \varphi)\frac{\partial^2u}{\partial\rho\partial\varphi}+\gamma(\rho,\ \varphi)\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\\&+\omega(\rho,\ \varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho}+\mu(\rho,\varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi}+f(\rho,\ \varphi)u\Big\}\\&+\chi(\rho,\ \varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\delta(\rho,\ \varphi)\frac{\partial u}{\partial\rho}-g(\rho,\ \varphi)u,\end{aligned}\tag{1.35}$$

其中

$$\alpha(\rho, \varphi)=a(\rho, \varphi)\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+2b(\rho, \varphi)\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}$$
$$+c(\rho, \varphi)\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2,$$
$$\beta(\rho, \varphi)=a(\rho, \varphi)\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b(\rho, \varphi)$$
$$\times\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+c(\rho, \varphi)\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$
$$\gamma(\rho, \varphi)=a(\rho, \varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2b(\rho, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$\times\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c(\rho, \varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2,$$
$$\omega(\rho, \varphi)=a(\rho, \varphi)\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+2b(\rho, \varphi)\frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y}$$
$$+c(\rho, \varphi)\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}+d(\rho, \varphi)\frac{\partial\rho}{\partial x}$$
$$+e(\rho, \varphi)\frac{\partial\rho}{\partial y},$$
$$\mu(\rho, \varphi)=a(\rho, \varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2b(\rho, \varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$
$$+c(\rho, \varphi)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+d(\rho, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$+e(\rho, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{1.36}$$
$$\delta(\rho, \varphi)=\frac{\partial\rho}{\partial x},$$
$$\chi(\rho, \varphi)=\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$
$$a(\rho, \varphi)=a(x, y),\ b(\rho, \varphi)=b(x, y),\ \cdots.$$

根据假定，L_2u 是椭圆型微分算子，$a(x, y)>0$，因此推得

$$\alpha(\rho,\ \varphi)>0, \tag{1.37}$$

而且

$$\delta(0,\ \varphi)=\frac{\partial\rho}{\partial x}\bigg|_{\Gamma_-}=\cos(\rho,\ x)\bigg|_{\Gamma_-}>0. \tag{1.38}$$

由于算子 $L_\varepsilon u$ 的系数是充分光滑的函数，在 $\rho=0$ 的邻域按 Taylor 展开式将它们表示为:

$$\begin{aligned}\alpha(\rho,\ \varphi)&=\alpha_0(\varphi)+\alpha_1(\varphi)\rho+\cdots\\&\quad+\alpha_N(\varphi)\rho^N+\alpha_{N+1}(\rho,\ \varphi)\rho^{N+1},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\\delta(\rho,\ \varphi)&=\delta_0(\varphi)+\delta_1(\varphi)\rho+\cdots\\&\quad+\delta_N(\varphi)\rho^N+\delta_{N+1}(\rho,\ \varphi)\rho^{N+1},\end{aligned} \tag{1.39}$$

$\delta_0(\varphi)=\delta(0,\ \varphi)\geqslant p^2>0$ （p 为常数）（由(1.38)），

$\alpha_0(\varphi)=\alpha(0,\ \varphi)\geqslant q^2>0$ （q 为常数）（由(1.37)）。

在 Q_η 内将算子 L_ε 作第二次分解．为此，引入伸长变换 $t=\rho/\varepsilon$．我们有 $\dfrac{\partial^s}{\partial\rho^s}=\varepsilon^{-s}\dfrac{\partial^s}{\partial t^s}$．将表达式(1.39)中所有 ρ 都换为 εt，代入(1.35)，则得到 L_ε 的新的分解:

$$\varepsilon L_\varepsilon u\equiv M_0u+\varepsilon R_1u+\cdots+\varepsilon^N R_N u+\varepsilon^{N+1}R_{N+1}u, \tag{1.40}$$

其中

$$M_0u\equiv\alpha_0(\varphi)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\delta_0(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1.41}$$

$$\begin{aligned}R_1u\equiv{}&\alpha_1(\varphi)t\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+2\beta_0(\varphi)\frac{\partial^2u}{\partial t\partial\varphi}+\omega_0(\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}\\&+\chi_0(\varphi)\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\delta_1(\varphi)t\frac{\partial u}{\partial t}-g_0(\varphi)u,\end{aligned} \tag{1.42}$$

$R_iu(1<i\leqslant N)$有类似的表达式，在其系数中含有因子 $t^j(j\leqslant i)$，而算子 $R_{N+1}u$ 的系数是形如 $t^kH(\rho,\ \varphi)$的项，其中 $k\leqslant N+1$，H 是一有界函数．

和常微分方程情形一样，在 Γ_- 邻域内求问题 A_ε 的边界

层解为以下形式

$$v_\varepsilon(x,\ y,\ \varepsilon)=v_\varepsilon\left(\frac{\rho}{\varepsilon},\ \varphi\right)=v_0+\varepsilon v_1+\cdots$$
$$+\varepsilon^{m+1}v_{m+1}+\cdots. \tag{1.43}$$

要求它满足齐次方程

$$L_\varepsilon v_\varepsilon=L_\varepsilon(\sum\varepsilon^i v_i)=0. \tag{1.44}$$

将(1.43)代入(1.44)，利用表达式(1.40)，合并 ε 的同幂项并令 ε^i 的系数为零，则得到确定 v_i 的递推方程

$$M_0v_0\equiv\alpha_0(\varphi)\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}+\delta_0(\varphi)\frac{\partial v_0}{\partial t}=0, \tag{1.45}$$

$$M_0v_i=-\sum_{s=1}^{i}R_s v_{i-s}. \tag{1.46}$$

方程(1.45)关于变量 t 是一常系数的二阶线性齐次常微分方程，而方程(1.46)是非齐次二阶线性常微分方程，它与(1.45)的差别只在于方程的右端.

方程(1.45)的特征方程是

$$\alpha_0(\varphi)\lambda^2+\delta_0(\varphi)\lambda=0. \tag{1.47}$$

此方程对 Γ_- 上任意一点 φ 在左半平面上有一个根

$$-\lambda_1(\varphi)=-\frac{\delta_0(\varphi)}{\alpha_0(\varphi)}<0.$$

此根的个数正是问题 A_ε 退化为问题 A_0 时所失去的定解条件的个数. 因此问题 A_ε 当 $\varepsilon=0$ 时正则退化为问题 A_0. 与 $-\lambda_1(\varphi)$ 相应的特解是:

$$v=\exp[-\lambda_1(\varphi)t]=\exp\left[-\lambda_1(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}\right].$$

显然，它具有边界层性质，我们自然要求 v_0 与 w_0 之和满足失去的边界条件

$$(v_0+w_0)|_{\Gamma^-}=0$$

或

$$v_0|_{t=0}=v_0|_{\rho=0}=-w(0,\ \varphi). \tag{1.48}$$

如此求得边界层校正项的一次近似

$$\begin{aligned} v_0 &= -w(0,\ \varphi)\exp(-\lambda_1(\varphi)t) \\ &= -w(0,\ \varphi)\exp\left[-\lambda_1(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}\right]. \end{aligned} \tag{1.49}$$

至于高次近似 v_i 可由方程(1.46)在边界条件

$$v_i|_{\Gamma_-}=-w_i|_{\Gamma_-} \tag{1.50}$$

下求得. 这些函数具有如下形式

$$v_i=P_i(t,\ \varphi)\exp(-\lambda_1 t)=P_i\left(\frac{\rho}{\varepsilon},\ \varphi\right)\exp\left[-\lambda_1(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}\right], \tag{1.51}$$

其中 P_i 是次数不超过 i 的变量 t 的多项式,其系数依赖于变量 φ, 因此都是边界层类型函数. 按边界条件(1.32)逐次解方程(1.33), (1.34); 按边界条件(1.48), (1.50)逐次解方程(1.45)和(1.46)即求得函数 w_i 和 v_i. 一般地, 级数(1.30)和(1.43)是渐近级数,只取具有余项的有限项之和,即构造问题 A_ε 解 u_ε 的如下渐近表示:

$$u_\varepsilon=\sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i w_i+\sum_{i=0}^{m+1}\varepsilon^i v_i+\varepsilon^{m+1}Z_m. \tag{1.52}$$

此时要求 v_{m+1} 满足的边界条件是:

$$v_{m+1}|_{\Gamma_-}=0. \tag{1.53}$$

在表达式(1.39)和(1.40)中假定 $N=m+1$. 由(1.52)和(1.40),我们有

$$\begin{aligned} \varepsilon^{m+1}L_\varepsilon Z_m &= L_\varepsilon u_\varepsilon - L_\varepsilon\left(w_0+\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i w_i\right)-L_\varepsilon\left(\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^j v_j\right) \\ &= h-\left\{L_1 w_0+L_1\left(\sum_{i=1}^{m}\varepsilon^i w_i\right)+\varepsilon L_2\left(\sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i w_i\right)\right\} \\ &\quad -\left\{\varepsilon^{-1}\left[M_0+\sum_{s=1}^{m+2}\varepsilon^s R_s\right]\left(\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.54}$$

如方程(1.33)，(1.34)直到 $i=m$ 为止都成立，方程(1.45)，(1.46)直到 $i=m+1$ 为止都成立，则在上式右端的第一个花括号中 $\varepsilon^i(0\leqslant i\leqslant m)$ 的所有项都消去，在第二个花括号中 $\varepsilon^i(i\leqslant m+1)$ 的所有项亦完全消去，因而在(1.54)的右端是一个形如 $\varepsilon^{m+1}g_m$ 的表达式，其中

$$g_m=-L_2w_m-(R_{m+2}v_0+R_{m+1}v_1+\cdots+R_1v_{m+1})+\cdots \tag{1.55}$$

在 $Q_\eta-V(A)-V(B)$ 内是一有界函数．从而得到余项中 Z_m 所满足的方程

$$L_\varepsilon Z_m=g_m. \tag{1.56}$$

1-5 渐近解的进一步讨论和余项估计 因为构造的边界层函数 v_i 只在 Q_η 内有定义，所以等式(1.54)和(1.56)只在 Q_η 内有意义．现引入**平滑函数** $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)(\rho<\eta)$：

$$\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)=\begin{cases}1, & \rho\leqslant\frac{\eta}{3},\\ 0, & \rho\geqslant\frac{2\eta}{3},\end{cases}\qquad 0\leqslant\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\leqslant 1, \tag{1.57}$$

并且在$[0, \eta]$内关于变量 ρ 无限可微．将所构造的边界层函数 v_i 乘以 $\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$并表示为：

$$\tilde{v}_i(x, y, \varepsilon)=\tilde{v}_i\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right)$$

$$=\begin{cases}\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)v_i\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi\right), & \text{在 } Q_\eta,\\ 0, & \text{在 } Q-Q_\eta.\end{cases} \tag{1.58}$$

函数 $\tilde{v}_i$ 是区域 $Q-V(A)-V(B)$ 内处处有定义的函数．此时表达式(1.54)有以下形式：

$$\varepsilon^{m+1}L_\varepsilon Z_m = h - \left\{L_1 w_0 + L_1\left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i w_i\right) + \varepsilon L_2\left(\sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i w_i\right)\right\}$$

$$-\left\{\varepsilon^{-1}\left[M_0 + \sum_{s=1}^{m+2} \varepsilon^s R_s\right]\left[\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r\right]\right\}$$

$$= -\varepsilon^{m+1}L_2 w_m - \varepsilon^{-1}\left\{\left[M_0 + \sum_{s=1}^{m+2}\varepsilon^s R_s\right]\right.$$

$$\left.\times\left[\psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r\right]\right\}. \qquad (1.59)$$

当 $\rho\leqslant\eta/3$ 时根据平滑函数的性质，表达式(1.59)就是(1.54). 当 $\rho\geqslant\frac{2\eta}{3}$ 时(1.59)中的第二项为零.

当 $\frac{\eta}{3}\leqslant\rho\leqslant\frac{2}{3}\eta$ 时，由于 v_i 含有的因子 $\exp\left(-\lambda_1(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$ 渐近地等于零，故可写

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left[\psi\left(\frac{\varepsilon t}{\eta}\right)v_i(t,\ \varphi)\right]\sim\psi\left(\frac{\varepsilon t}{\eta}\right)\frac{\partial^p}{\partial t^p}[v_i(t,\ \varphi)].$$

从而可写(1.59)为：

$$\varepsilon^{m+1}L_\varepsilon Z_m = -\varepsilon^{m+1}L_2 w_m - \psi\left(\frac{\rho}{\eta}\right)$$

$$\times\varepsilon^{-1}\left\{\left[M_0 + \sum_{s=1}^{m+2}\varepsilon^s R_s\right]\left(\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon^r v_r\right)\right\}. \qquad (1.60)$$

利用递推方程(1.45)，(1.46)，我们又得到(1.56)．由此推得 Z_m 所满足的方程(1.56)在 $Q-V(A)-V(B)$ 内处处成立，g_m 是一有界函数.

根据边界层函数的构造，由方程(1.56)我们知道 Z_m 是下面边值问题的解：

$$L_\varepsilon Z_m = g_m, \qquad (1.61)$$

$$Z_m\big|_{\Gamma\cap(\bar{Q}-V(A)-V(B))} = 0. \qquad (1.62)$$

如能证得 $Z_m = O(1)$，则得到摄动问题 A_ε 渐近解的余项估计，它是 $O(\varepsilon^{m+1})$ 的量．Люстерник 和 Вишик 利用范数估计

得到以下的结果.

定理 1 若摄动问题 A_ε 的参数具有 $2(m+1)+l$ 阶光滑度,则

$$u_\varepsilon = w_0 + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^i w_i + \sum_{r=0}^{m+1} \varepsilon^r \tilde{v}_r + \varepsilon^{m+1} Z_m, \qquad (1.52)$$

其中 w_i 是由第一迭代过程得到, $\tilde{v}_r$ 是 Γ_- 邻域内的边界层函数,由第二迭代过程求得.

设 $\tilde{Q}=Q-V(A)-V(B)$, $z_m=\varepsilon^{m+1}Z_m$,

$$\|z\|^2_{\tilde{Q}} = \iint_{\tilde{Q}} z^2 dxdy,$$

则在 $\tilde{Q}$ 内有

$$\|z_m\|_{\tilde{Q}} = O(\varepsilon^{m+1}). \qquad (1.63)$$

此外,对公式(1.52)可逐项微分 $l+2$ 次:

$$D^i u_\varepsilon = \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j D^i w_j + \sum_{r=0}^{m+1} \varepsilon^r D^i \tilde{v}_r + D^i z_m \qquad (1.64)$$

(D^i 表示 i 阶的偏导数),并且

$$\|D^1 z_m\|_{\tilde{Q}} = O(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}), \quad \|D^2 z_m\|_{\tilde{Q}} = O(\varepsilon^m),$$

$$\|D^i z_m\|_{Q_1} = O(\varepsilon^{m+1-\frac{i}{2}}), \qquad (1.65)$$

$$\|D^i z_m\|_{U(\Gamma_-)} = O(\varepsilon^{m+2-i+\frac{1}{2}}), \quad 3 \leqslant i \leqslant l+2,$$

其中 $U(\Gamma_-)$ 是边界 Γ_- 的邻域, $Q_1=Q-U(\Gamma_-)$ 是不包含 $U(\Gamma_-)$ 的任意一个固定的子区域.

这一定理的详细证明请读者参看[1].

应指出,若方程右端有直到 $2m+1$ 阶偏导数,而方程系数的光滑性条件再低一些,仍有

$$\|z_m\|_{\tilde{Q}} = O(\varepsilon^{m+1}), \quad \|D^1 z_m\|_{\tilde{Q}} = O(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}),$$

即渐近解的余项为 $O(\varepsilon^{m+1})$,它的一阶偏导数为 $O(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}})$.

1966 年 Eckhaus and DE Jager[22]对摄动问题(1.16), (1.17)建立了椭圆型方程(1.16)的极值原理，根据极值原理证明了这一问题渐近解的余项按最大模亦为 $O(\varepsilon^{m+1})$ 的量，对余项的导数未作出估计.

在本节开始我们曾指出，问题(1.16)，(1.17)的比较简单形式早为 Wasow[20], Levinson[21] 研究过，但 Levinson 构造边界层函数的过程过于复杂，需解一阶非线性偏微分方程，而 Люстерник-Вишик 方法对于非特征边界只要求解常系数常微分方程(见(1.45)和(1.46))，对于特征边界情形也只是解一个简单的二阶抛物型方程(见最后一节)，这样 Люстерник 和 Вишик 将构造过程大大减化，从而促进了奇异摄动理论的发展，使它的适用范围更加广泛.

在以上讨论中边界层校正项的构造是在 $Q-V(A)-V(B)$ 内进行的，至于在切点 A 和 B 的邻域内如何构造边界层函数请参看本章末所提到的研究工作.

§2 高阶椭圆型方程第一边值问题

2-1 微分方程问题 设 Q 是 n 维空间 R_n 的有界区域，具有充分光滑的边界 Γ。我们用 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 R_n 的任意一点. 在 Q 内给定微分算子

$$L_{2k}\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant 2k}a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{2.1}$$

$$L_{2k+i}\equiv\sum_{|\alpha|=2k+i}a_\alpha(x)D^\alpha \quad (i=1, 2, \cdots, 2l). \tag{2.2}$$

其中 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 是下标 $\alpha_s\geqslant0$ 序列，

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n;\quad D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n},$$

$$D_s=\frac{\partial}{\partial x_s}\quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

假定系数 $a_\alpha(x)$ 在 $Q+\Gamma$ 内充分光滑. 现组成具有小参数 $\varepsilon(\varepsilon\in[0,\ \varepsilon_0])$ 的微分算子 L_ε:

$$L_\varepsilon\equiv\sum_{i=1}^{2l}\varepsilon^i L_{2k+i}+L_{2k}. \tag{2.3}$$

假定算子 L_ε, L_{2k} 都是椭圆型微分算子, 即它们的特征多项式

$$P(x,\ \xi)=\sum_{|\alpha|=2k+2l}a_\alpha(x)\xi^\alpha,\ P_0(x,\ \xi)=\sum_{|\alpha|=2k}a_\alpha(x)\xi^\alpha, \tag{2.4}$$

对任意实向量 $\xi=(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)\neq 0$ 及任意 $x\in Q+\Gamma$ 都不为零. ξ^α 应理解为表达式 $\xi_1^{\alpha_1}\cdot\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$.

在 $Q+\Gamma$ 内我们研究如下的摄动问题 A_ε 和退化问题 A_0:

摄动问题 A_ε: 在 $Q+\Gamma$ 内解 $2k+2l$ 阶椭圆型方程第一边值问题:

$$L_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\sum_{i=1}^{2l}\varepsilon^i L_{2k+i}u+L_{2k}u=h(x), \tag{2.5}$$

$$u|_\Gamma=0,\ \frac{\partial^s u}{\partial\rho^s}\bigg|_\Gamma=0\quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^{k+j}u}{\partial\rho^{k+j}}\bigg|_\Gamma=0\quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ l-1), \tag{2.7}$$

其中 ρ 是边界 Γ 的内法线.

退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$: 在 $Q+\Gamma$ 内解 $2k$ 阶椭圆型方程第一边值问题:

$$L_{2k}w\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant 2k}a_\alpha(x)D^\alpha w=h(x), \tag{2.8}$$

$$w|_\Gamma=0,\ \frac{\partial^s w}{\partial\rho^s}\bigg|_\Gamma=0\quad (s=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1). \tag{2.9}$$

当 $\varepsilon=0$ 时问题 A_ε 退化为问题 A_0, 此时方程(2.5)的阶

数降低 $2l$，退化方程的解 W 一般地不满足边界条件(2.7)。因此当摄动问题 A_ε 退化时将失去 l 个边界条件，在边界 Γ 附近产生边界层现象.

2-2 基本迭代过程 为了构造摄动问题(2.5)，(2.6)，(2.7)的渐近解，和常微分方程情形一样，Люстерник 和 Вишик 将过程分为两步.

1) 第一迭代过程 先在区域 Q 的内部根据算子 L_ε 的原来分解(2.3)构造问题 A_ε 的解为以下形式:

$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \cdots + \varepsilon^n w_n + \cdots. \tag{2.10}$$

要求它满足方程(2.5):

$$\begin{aligned} L_\varepsilon w_\varepsilon = (L_{2k} + \varepsilon L_{2k+1} + \varepsilon^2 L_{2k+2} + \cdots \\ + \varepsilon^{2l} L_{2k+2l})(w_0 + \varepsilon w_1 + \cdots) = h(x) \end{aligned} \tag{2.11}$$

和边界条件(2.6).

在方程(2.11)中合并 ε 的同幂项，并令 ε 的同幂项系数为零，则得到确定 w_0, w_1, …的递推方程:

$$\begin{aligned} &L_{2k} w_0 = h, \\ &L_{2k} w_1 = -L_{2k+1} w_0, \\ &L_{2k} w_2 = -L_{2k+2} w_0 - L_{2k+1} w_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{aligned} \tag{2.12}$$

第一个方程就是退化方程(2.8)，其余方程和它的差别只在于右端项. 和以前一样，解这些方程时我们将遇到的困难是，这些方程的右端都是以阶数高于 L_{2k} 的算子 L_{2k+i} 对已求得的 w_i 所作用的结果，因此必须要求算子 L_{2k} 的系数，右端函数 h 以及边界 Γ 足够光滑，以保证迭代过程得以合理进行. 此外，算子 L_{2k} 是 $2k$ 阶椭圆型算子，方程 $L_{2k} w_i = g_i$ ($g_0 = h$, $g_1 = -L_1 w_0$, …)的解只需 k 个边界条件(2.6)就足以确定，而问题 A_ε 的解是由 $k+l$ 个边界条件(2.6)，(2.7)所确定，

函数 w_i 一般地不满足其余 l 个边界条件，为了补足失去的 l 个边界条件，还需第二迭代过程以构造边界层校正项.

2) 第二迭代过程　这一过程的基本思想与二阶椭圆型方程情形一样，但由于方程是高阶的，在处理方法上将复杂得多. 先在边界 Γ 邻域内引入局部坐标. 设 A 是 Γ 上的任意一点，它的位置由坐标 $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})$ 确定. 从 A 出发向区域 Q 内引 Γ 的内法线 AB，设 AB 的长为 $\delta(\delta>0)$. 取 δ 适当小使得这些内法线互不相交. 这些内法线的全体充满于区域 Q 靠近边界 Γ 的那一部分，形成 Q 的子区域 Γ_δ. 我们在 Γ_δ 内来定义任意一点的坐标 $(\rho, \varphi)=(\rho, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$. 若点 A 是 Γ 上的任意一点，其坐标为 $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$，$AB$ 是从点 A 引出的 Γ_δ 内 Γ 的内法线，则 AB 上的任意一点 C 的坐标 $(\rho, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$ 定义为：坐标 ρ 表示点 C 到点 A 的距离，而 $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})$ 是边界 Γ 上点 A 的坐标. $\rho=0$ 是边界 Γ 的方程，$\varphi_i=\text{const}(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 确定了 Γ 的内法线.

我们将每一个微分算子 L_{2k+i} 按新坐标系 (ρ, φ) 表示为

$$L_{2k+i}u\equiv\alpha_{2k+i}(\rho, \varphi)\frac{\partial^{2k+i}u}{\partial\rho^{2k+i}}+\sum_{j=1}^{2k+i}\sum_{s\leqslant j}\sum_{(s)}\times\beta_{j,(s)}(\rho,\varphi)\frac{\partial^{2k+i-j}}{\partial\rho^{2k+i-j}}D^{(s)}u, \tag{2.13}$$

其中 (s) 是一组非负数 $s_i(i=1, 2, \cdots, n-1)$，$(s)=(s_1, s_2, \cdots, s_{n-1})$，$\sum_{i=1}^{n-1}s_i=s$，$D^{(s)}=\dfrac{\partial^s}{\partial\varphi_1^{s_1}\cdots\partial\varphi_{n-1}^{s_{n-1}}}$. 对于算子 L_{2k} 中所有 $2k$ 阶偏导数项之和亦有类似的表达式，即(2.13)中 $i=0$ 的情形.

将(2.13)中的每一个系数 α_{2k+i}, $\beta_{j,(s)}$ 在 $\rho=0$ 的近旁按 Taylor 公式展开，我们有

$$\alpha_{2k+i}(\rho,\ \varphi)=\alpha_{2k+i}(\varphi)+\sum_{\sigma=1}^{N}\rho^{\sigma}\alpha_{2k+i,\sigma}(\varphi)$$
$$+\rho^{N+1}\alpha_{2k+i,N+1}(\theta_1\rho,\ \varphi), \tag{2.14}$$
$$\beta_{j,(s)}(\rho,\ \varphi)=\beta_{j,(s)}(\varphi)+\sum_{\sigma=1}^{N-j}\beta_{j,(s),\sigma}(\varphi)\rho^{\sigma}$$
$$+\rho^{N-j+1}\beta_{j,(s),N-j+1}(\theta_2\rho,\ \varphi). \tag{2.15}$$

作伸长变换

$$t=\frac{\rho}{\varepsilon}, \tag{2.16}$$

那末

$$\frac{\partial^s}{\partial\rho^s}=\varepsilon^{-s}\frac{\partial^s}{\partial t^s}. \tag{2.17}$$

由(2.14), (2.15)我们有

$$\alpha_{2k+i}(\rho,\ \varphi)\frac{\partial^{2k+i}u}{\partial\rho^{2k+i}}$$
$$=\varepsilon^{-(2k+i)}\Big[\alpha_{2k+i}(\varphi)+\sum_{\sigma=1}^{N}\varepsilon^{\sigma}t^{\sigma}\alpha_{2k+i,\sigma}(\varphi)$$
$$+\varepsilon^{N+1}t^{N+1}\alpha_{2k+i,N+1}(\theta_1\rho,\ \varphi)\Big]\frac{\partial^{2k+i}u}{\partial t^{2k+i}}, \tag{2.18}$$

$$\beta_{j,(s)}(\rho,\ \varphi)\frac{\partial^{2k+i-j}}{\partial\rho^{2k+i-j}}D^{(s)}u$$
$$=\varepsilon^{-(2k+i)+j}\Big[\beta_{j,(s)}(\varphi)+\sum_{\sigma=1}^{N-j}\varepsilon^{\sigma}t^{\sigma}\beta_{j,(s),\sigma}(\varphi)$$
$$+\varepsilon^{N-j+1}t^{N-j+1}\beta_{j,(s),N-j+1}(\theta_2\rho,\varphi)\Big]\frac{\partial^{2k+i-j}}{\partial t^{2k+i-j}}D^{(s)}u, \tag{2.19}$$

其中 $\alpha_{2k+i}(\varphi)=\alpha_{2k+i}(0,\varphi)$, $\beta_{j,(s)}(\varphi)=\beta_{j,(s)}(0,\varphi)$. 将(2.18), (2.19)代入(2.13)得到

$$\varepsilon^{i}L_{2k+i}u\equiv\varepsilon^{-2k}\Big\{\alpha_{2k+i}(\varphi)\frac{\partial^{2k+i}u}{\partial t^{2k+i}}+\varepsilon L_{2k+i}^{(1)}u+\cdots$$
$$+\varepsilon^{N}L_{2k+i}^{(N)}u+\varepsilon^{N+1}L_{2k+i}^{(N+1)}u\Big\}, \tag{2.20}$$

其中

$$L_{2k+i}^{(1)}u = t\alpha_{2k+i,1}(\varphi)\frac{\partial^{2k+i}u}{\partial t^{2k+i}} + \sum_{s=0}^{1}\beta_{1,(s)}(\varphi)\frac{\partial^{2k+i-1}u}{\partial t^{2k+i-1}}D^{(s)}u,$$

$L_{2k+i}^{(\nu)}(\nu \leqslant N)$ 是关于 t, φ 的线性微分算子，其系数具有 $C(\varphi)t^j$, $0 \leqslant j \leqslant \nu$ 的形式, $C(\varphi)$ 是 φ 的函数.

最后, 算子 $L_{2k+i}^{(N+1)}$ 的系数具有

$$\alpha_{2k+i,N+1}(\theta_1\rho,\ \varphi)t^{N+1},\ \beta_{j,(s),N-j+1}(\theta_2\rho,\ \varphi)t^{N+1-j}$$

的形式, 其中 $\alpha_{2k+i,N+1}$, $\beta_{j,(s),N-j+1}$ 是 ρ, φ 的有界函数.

由(2.20)推得算子 L_ε 的第二次分解:

$$L_\varepsilon u \equiv \sum_{i=0}^{2l}\varepsilon^i L_{2k+i}u = \varepsilon^{-2k}\left[M_0 u + \sum_{r=1}^{N+1}\varepsilon^r M_r u\right], \qquad (2.21)$$

其中

$$M_0 u \equiv \sum_{i=0}^{2l}\alpha_{2k+i}(\varphi)\frac{\partial^{2k+i}u}{\partial t^{2k+i}} \qquad (2.22)$$

是关于变量 t 的常微分算子, 其系数不依赖于 t; 线性微分算子 $M_r u(r \leqslant N)$ 的系数具有 $\sum_{j\leqslant r}\rho_j(\varphi)\times t^j$ 的形式; 而 $M_{N+1}u$ 的系数具有 $\sum_{j\leqslant N+1}d_j(\rho,\ \varphi)t^j$ 的形式, 其中 $d_j(\rho,\ \varphi)$ 是与 ε 无关的 ρ、φ 的有界函数.

在 Γ_δ 内构造边界层校正项 v_ε 为以下形式:

$$v_\varepsilon = \varepsilon^k(v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^n v_n + \cdots), \qquad (2.23)$$

要求它满足齐次方程:

$$L_\varepsilon v_\varepsilon = 0, \qquad (2.24)$$

它与 w_ε 之和 $w_\varepsilon + v_\varepsilon$ 应满足失去的 l 个边界条件(2.7)并且此和除 $O(\varepsilon)$ 量外仍满足前 k 个边界条件(2.6). 由(2.24), (2.21)和(2.23)我们有

$$\begin{aligned} 0 &= L_\varepsilon[\varepsilon^k(v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^n v_n + \cdots)] \\ &= \varepsilon^{-k}(M_0 + \varepsilon M_1 + \cdots + \varepsilon^{N+1}M_{N+1}) \\ &\quad \times (v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^n v_n + \cdots). \end{aligned} \qquad (2.25)$$

它的主要部分是：

$$M_0v_0 \equiv \sum_{i=0}^{2l} \alpha_{2k+i}(\varphi) \frac{\partial^{2k+i}v_0}{\partial t^{2k+i}} = 0. \qquad (2.26)$$

这是边界层校正项中一次近似 v_0 应满足的微分方程．由于我们所讨论的摄动问题当 $\varepsilon=0$ 时将失去 l 个边界条件，为了在第一迭代过程所得的函数中加进边界层校正项以补足这失去的 l 个条件，当然要求在第二迭代过程所构造的函数具有 l 个自由度，是一边界层类型函数．

2-3　正则退化　方程(2.26)关于变量 t 是常系数常微分方程，它的特征方程是

$$\lambda^{2k} \sum_{i=0}^{2l} \alpha_{2k+i}(\varphi) \lambda^i = 0. \qquad (2.27)$$

因为算子 L_k 和 L_{2k+2l} 是椭圆型算子，所以

$$\alpha_{2k}(\varphi) = \alpha_{2k}(0,\ \varphi) \neq 0,\ \alpha_{2k+2l}(\varphi) = \alpha_{2k+2l}(0,\ \varphi) \neq 0.$$

如果方程(2.27)具有负实部根的个数等于 l，即等于摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0 时所失去的边界条件的个数，则称问题 A_ε 正则退化为问题 A_0(为简单起见，假定这些根是单根)．

我们假定退化是正则的，那末方程(2.26)的通解有如下形式：

$$v = \sum_{i=1}^{l} C_i(\varphi) e^{-\lambda_i(\varphi)t} = \sum_{i=1}^{l} C_i(\varphi) e^{-\frac{\lambda_i(\varphi)\rho}{\varepsilon}}, \qquad (2.28)$$

其中 $-\lambda_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ 是方程(2.27)的根 $\mathrm{Re}\lambda_i(\varphi) \geqslant \lambda_0 > 0$，因此方程(2.26)的解是边界层类型函数．在 l 个条件

$$\left.\frac{\partial^{k+s}v_0}{\partial t^{k+s}}\right|_{t=0} = \gamma_s(\varphi) \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ l-1) \qquad (2.29)$$

下系数 $C_i(\varphi)$ 可唯一确定．事实上，将(2.28)代入(2.29)，我们得到确定 l 个系数 $C_i(\varphi)$ 的线代数方程组

$$\sum_{i=1}^{l} C_i(\varphi)(-\lambda_i)^{k+s}=\gamma_s(\varphi) \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ l-1). \tag{2.30}$$

它的系数行列式是 Vandermonde 行列式，根据假定，此行列式异于零，所以 $C_i(\varphi)$ 被唯一确定.

由方程(2.25)我们可以得到高次近似 v_i 应满足的递推方程

$$M_0 v_i=-\sum_{r=1}^{i} M_r v_{i-r} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots). \tag{2.31}$$

方程(2.31)是非齐次方程，它与(2.26)的区别只在于非齐次项，下面我们要证明，这些方程在一定边界条件下的解 v_i 都是边界层类型函数.

2-4 二重迭代过程 现将第一迭代过程和第二迭代过程结合起来逐次确定函数 $w_0,\ v_0;\ w_1,\ v_1;\ \cdots$.

按前面讨论，构造的级数解

$$u_\varepsilon=(w_0+\varepsilon w_1+\cdots)+\varepsilon^k(v_0+\varepsilon v_1+\cdots) \tag{2.32}$$

一般地是渐近级数，我们可以求此解为具有余项的有限项之和，即

$$u_\varepsilon=W_n+\varepsilon^k V_{n+k}+\varepsilon^{n+1}Z_n, \tag{2.33}$$

其中

$$W_n=w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^n w_n, \tag{2.34}$$

$$V_{n+k}=v_0+\varepsilon v_1+\cdots+\varepsilon^{n+k}v_{n+k}, \tag{2.35}$$

$\varepsilon^{n+1}Z_n$ 是余项.

为对称起见，令

$$w_{n+1}\equiv w_{n+2}\equiv\cdots\equiv w_{n+k}\equiv 0. \tag{2.36}$$

我们要求，在展开式(注意 L_ε 的原来分解(2.3)和第二次分解(2.21))

$$L_\varepsilon W_n-h=(L_{2k}+\varepsilon L_{2k+1}+\cdots \\ +\varepsilon^{2l}L_{2k+2l})(w_0+\varepsilon w_1+\cdots+\varepsilon^n w_n)-h, \tag{2.37}$$

$$L_\varepsilon(\varepsilon^k V_{n+k}) = \varepsilon^{-k}(M_0 + \varepsilon M_1 + \cdots + \varepsilon^{N+1} M_{N+1}) \times (v_0 + \varepsilon v_1 + \cdots + \varepsilon^{n+k} v_{n+k}) \tag{2.38}$$

中 $\varepsilon^s(s=-k,\ -k+1,\ \cdots,\ n)$的所有系数为零. 同样得到确定函数 $w_0,\ w_1,\ \cdots,\ w_n$ 的第一迭代过程:

$$\left.\begin{aligned} &L_{2k}w_0 = h, \\ &L_{2k}w_i = -\sum_{r=1}^{i} L_{2k+r}w_{i-r} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \\ &L_{2l+s} \equiv 0 \qquad\qquad\qquad (s>0), \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

以及确定边界层函数的第二迭代过程(取 $N=n+k$)

$$\left.\begin{aligned} &M_0 v_0 = 0, \\ &M_0 v_i = -\sum_{r=1}^{i} M_r v_{i-r} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n+k). \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

从而由(2.37)和(2.38)得到

$$L_\varepsilon W_n = h + \varepsilon^{n+1} X_n, \tag{2.41}$$

$$L_\varepsilon(\varepsilon^k V_{n+k}) = \varepsilon^{n+1} Y_n. \tag{2.42}$$

因此

$$L Z_n = -(X_n + Y_n). \tag{2.43}$$

利用边界条件将第一迭代过程和第二迭代过程连结起来以得到二重迭代过程. 由边界条件(2.6), (2.7)和伸长变换(2.16)我们有

$$\left.\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial \rho^s}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=0} = \varepsilon^{-s}\left.\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial t^s}\right|_{t=0} = 0 \tag{2.44}$$

$$(s=0,\ 1,\ \cdots,\ k+l-1).$$

将表达式(2.33)代入(2.44):

$$\left.\frac{\partial^s u_\varepsilon}{\partial \rho^s}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^s W_n}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=0} + \varepsilon^{k-s}\left.\frac{\partial^s V_{n+k}}{\partial t^s}\right|_{t=0} + \varepsilon^{n+1}\left.\frac{\partial^s Z_n}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=0} = 0. \tag{2.45}$$

在上式中合并 ε 的同幂项并令 $\varepsilon^l(l\leqslant n)$ 的所有系数为零，得到 w_i 和 v_i 应满足的边界条件：

$$\left.\frac{\partial^s w_i}{\partial\rho^s}\right|_{\rho=0}+\left.\frac{\partial^s v_{i-k+s}}{\partial t^s}\right|_{t=0}=0. \tag{2.46}$$

由(2.36)，在(2.46)中令 $w_{-r}\equiv 0$, $v_{-r}\equiv 0(r>0)$. 在(2.45)中所有 $\varepsilon^s(s\leqslant n)$ 的项消失以后我们得到

$$\left.\frac{\partial^s Z_n}{\partial\rho^s}\right|_{\rho=0}=\gamma_s \quad (s=0,\ 1,\ \cdots,\ k+l-1), \tag{2.47}$$

其中 γ_s 是 φ 的已知函数. 在(2.46)中对于 $0\leqslant s<k$ 的 k 个边界条件可改写为：

$$\left.\frac{\partial^s w_i}{\partial\rho^s}\right|_{\rho=0}=-\left.\frac{\partial^s v_{i-(k-s)}}{\partial t^s}\right|_{t=0} \quad \begin{pmatrix} s=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1 \\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{pmatrix}, \tag{2.48}$$

这是函数 w_i 应满足的边界条件. 当 $s=k+r$, $r\geqslant 0$ 时在(2.48)中将 $i+r$ 换为 i, 将 i 换为 $i-r$, 可将(2.46)中其余 l 个条件改写为：

$$\left.\frac{\partial^{k+r} v_i}{\partial t^{k+r}}\right|_{t=0}=-\left.\frac{\partial^{k+r} w_{i-r}}{\partial\rho^{k+r}}\right|_{\rho=0} \quad \begin{pmatrix} r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ l-1 \\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n+k \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

这是函数 v_i 应满足的边界条件.

当 $i=0$ 时根据(2.36)边界条件(2.48)的右端等于零，因此边界条件(2.48)就是边界条件(2.9)，w_0 是退化问题 A_0 的解. 我们假定，退化问题 A_0 不位于谱上，即在边界条件(2.6)下零不是算子 L_{2k} 的特征值. 在这假定下解 w_0 存在且唯一.

求得 w_0 以后，再由方程(2.26)和边界条件(2.49)($i=0$)求函数 v_0. 条件(2.49)在此情况下有以下形式：

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial^k v_0}{\partial t^k}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial^k w_0}{\partial \rho^k}\right|_{\rho=0},\\
&\left.\frac{\partial^{k+r} v_0}{\partial t^{k+r}}\right|_{t=0} = 0 \quad (r=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1).
\end{aligned}\right\} \tag{2.50}
$$

这是条件(2.29)的特殊形式，根据我们在 2.3 的讨论 v_0 是唯一确定的，并且 v_0 具有(2.28)形式，是边界层类型函数.

按边界条件(2.48)解方程(2.39)可逐次确定函数 w_1, w_2, $\cdots$, w_n; 按边界条件(2.49)解方程(2.40)可逐次确定函数 $v_1, v_2, \cdots, v_{n+k}$, 由于函数 w_i 和 v_i是由边界条件(2.48)和(2.49)连结在一起的，我们可以"搭配地"确定这些函数，即逐次求得 w_0, v_0; w_1, v_1; $\cdots$. 如此我们得到求 w_0, v_0; w_1, v_1; $\cdots$的二重迭代过程.

在边界条件(2.48)下，根据退化问题 A_0 不在谱上这一假定，方程(2.39)是唯一可解的. 例如第 $i(i\leqslant n)$ 个方程，只要 w_r, $v_r(r<i)$ 都已求得，其右端是已知函数. 按假定，齐次问题只有零解，因此它唯一可解.

在边界条件(2.49)下方程(2.40)亦有同样结论，不但如此，而且在正则退化的情况下它的解是边界层函数(其定义见第一章§1.). 例如第 i 个方程，当 w_r, $v_r(r<i)$, w_i 确定以后，方程(2.40)的右端是已知函数. 现证 v_i 是边界层类型函数，是被唯一确定的.

引理 1 方程(2.40)的解 $v_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n+k)$有以下形式

$$
v_i = \sum_{r=1}^{l} P_{ri}(t;\varphi) e^{-\lambda_r t}, \tag{2.51}
$$

其中 $P_{ri}(t;\varphi)$关于变量 t 是一多项式.

这一引理与第一章§1.引理 1 相似，其差别在于多项式 $P_{ri}(t;\varphi)$的系数是变量 φ 的函数.

证明 用归纳法证之．当 $i=0$ 时由(2.28)知道，这一论断成立．假定对一切 $v_s(s\leqslant i-1)$ 这一论断成立．现证当 $s=i$ 时论断亦成立．根据算子 L_s 的第二次分解的结构(2.21)，算子 $M_p(p\leqslant N=n+k)$ 的系数是次数不超过 p 的多项式，并且所有 $v_s(s\leqslant i-1)$ 都具有(2.51)形式，从而方程(2.40)的右端亦具有此形式，我们把它表示为 b_i：

$$b_i=\sum_{r=1}^{l}b_{ri},$$

$$b_{ri}=\sum_{s=0}^{l_{ri}}C_{s,ri}(\varphi)t^s e^{-\lambda_i t}. \tag{2.52}$$

现以 b_{ri} 为右端，利用常数变易法求方程

$$M_0 v_{ri}=b_{ri} \tag{2.53}$$

如下形式的特解：

$$v_{ri}=\sum_{s=0}^{l_{ri}+1}D_{s,ri}(\varphi)t^s e^{-\lambda_i t}. \tag{2.54}$$

将这些特解迭加起来就得到(2.40)的第 i 方程的特解

$$v_i^*=\sum_{r=1}^{l}v_{ri}, \tag{2.55}$$

$$M_0 v_i^*=b_i. \tag{2.56}$$

方程(2.40)$(i\geqslant 1)$的通解可用此特解加上齐次方程 $M_0 v_0=0$ 的通解得到：

$$v_i=v_i^*+\sum_{r=1}^{l}C_r(\varphi)e^{-\lambda_r t} \tag{2.57}$$

从而由(2.54)，(2.55)和(2.57)推得方程(2.40)的解亦具有(2.51)的形式．于是引理得证．

将(2.57)代入(2.49)就得到含有 l 个方程 l 个未知数确定 l 个系数 $C_r(\varphi)$ 的线代数方程组，这个方程组的形状与(2.30)相同，唯一可解．

在求得所有 $v_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 以后可类似地求 v_{n+1}，

$v_{n+2}, \cdots, v_{n+k}$, 但需注意 $w_{n+p}\equiv 0(p>0)$，即关系式(2.36)．迭代过程对 w_i 来说到 n 步为止，对 v_i 来说到 $n+k$ 步为止，最后得到摄动问题 A_ε 的渐近式(2.33)和余项 $\varepsilon^{n+1}Z_n$ 中 Z_n 所满足的方程(2.43)．

2-5 渐近解的进一步讨论和余项估计 上面求得的边界层函数 v_i 只在 Γ_δ 内有定义，等式(2.43)只在 Γ_δ 内有意义．为了使得 v_i 在整个区域 Q 内有定义，在 Γ_δ 内将它们都乘上平滑函数 $\psi(\rho)$：

$$\psi(\rho)=\begin{cases}1, & \rho\leqslant\delta/3,\\ 0, & \rho\geqslant 2\delta/3,\end{cases}\quad 0\leqslant\psi(\rho)\leqslant 1, \tag{2.58}$$

并且在 $0\leqslant\rho\leqslant\delta$ 内关于变量 ρ 无限可微．将乘上平滑函数的边界层函数表示为：

$$\bar{v}_i=\psi(\rho)v_i. \tag{2.59}$$

当 $\rho\leqslant\dfrac{\delta}{3}$ 时，$\bar{v}_i=v_i$；当 $\rho\geqslant\dfrac{2\delta}{3}$ 时 $\bar{v}_i=0$；在 $Q-\Gamma_\delta$ 内 $\bar{v}_i\equiv 0$．如此 v_i 扩充到整个区域 Q 上．当 $\dfrac{\delta}{3}\leqslant\rho\leqslant\dfrac{2\delta}{3}$ 时，由于 v_i 含有指数型渐近等于零的因子 $\exp\left(-\lambda_i(\varphi)\dfrac{\rho}{\varepsilon}\right)$，因此对任意正整数 p 有

$$\begin{aligned}&|v_i-\bar{v}_i|=O(\varepsilon^p),\\ &|D^q v_i-D^q\bar{v}_i|=O(\varepsilon^p),\end{aligned} \tag{2.60}$$

其中 D^q 是任意 q 阶的偏导数．如此摄动问题 A_ε 的渐近解有如下表示：

$$u_\varepsilon=w_0+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i w_i+\varepsilon^k\sum_{i=0}^{n+k}\varepsilon^i\bar{v}_i+\varepsilon^{n+1}Z_n \tag{2.61}$$

$$(\bar{v}_i=\psi(\rho)v_i).$$

由(2.60)，在区域 Q 内处处有(2.42)成立，从而(2.43)在 Q

内亦处处成立，即 Z_n 满足方程

$$L_\varepsilon Z_n = -(X_n + Y_n). \tag{2.43'}$$

由(2.47) Z_n 满足的边界条件是：

$$\left.\frac{\partial^s Z_n}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=0} = \gamma_s \quad (s=0, 1, \cdots, k+l-1). \tag{2.47}$$

如能证得 Z_n 在相应的 Banach 范数 $\| \quad \|_1$ 下 $\|Z_n\|_1 = O(1)$，则得到渐近解的余项是 $O(\varepsilon^{n+1})$ 的量. 在一定条件下这一论断是正确的，现在来证明它.

先构造一函数 $Z_n^{(1)}$，要求它满足边界条件(2.47)并有 $2(k+l)$ 阶有界导数. 例如，可构造此函数为

$$Z_n^{(1)} = \psi(\rho) \sum_{s=0}^{k+l-1} \frac{\gamma_s}{s!} \rho^s, \tag{2.62}$$

其中 $\psi(\rho)$ 是平滑函数(2.58). 那末可求方程(2.43')在边界条件(2.47)下的解为以下形式：

$$Z_n = Z_n^{(1)} + Z_n^{(2)}, \tag{2.63}$$

其中 $Z_n^{(2)}$ 是方程

$$L_\varepsilon Z_n^{(2)} = -(X_n + Y_n + L_\varepsilon Z_n^{(1)}) \tag{2.64}$$

在齐次边界条件

$$\left.\frac{\partial^s Z_n^{(2)}}{\partial \rho^s}\right|_{\rho=0} = 0 \quad (s=0, 1, \cdots, k+l-1) \tag{2.65}$$

下的解.

我们假定，逆算子 L_ε^{-1} 当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时一致有界，即对于一切满足齐次边界条件(2.65)并且使算子 L_ε 有定义的函数 u 有下列不等式成立：

$$\|L_\varepsilon u\| \geqslant \alpha^2 \|u\|_1, \tag{2.66}$$

其中 $\| \quad \|$ 是 $L_p(Q)$ 范数，ε_0，α^2 都是正的常数. 由(2.64)和(2.66)推得 $\|Z_n\|_1$ 是有界的：

$$\|Z_n\|_1 \leqslant \|Z_n^{(1)}\|_1 + \|Z_n^{(2)}\|_1,$$
$$\|Z_n^{(2)}\|_1 \leqslant \frac{1}{\alpha^2}(\|X_n\| + \|Y_n\| + \|L_\varepsilon Z_n^{(1)}\|). \tag{2.67}$$

至此，我们构造了摄动问题(2.5)，(2.6)，(2.7)的渐近解并对余项作出了估计．在整个讨论过程中我们利用了以下四个条件：

A．退化问题 A_0 不在谱上；

B．当 $\varepsilon=0$ 时摄动问题 A_ε 正则退化为问题 A_0；

C．算子 L_ε 的逆算子 L_ε^{-1} 在(2.66)意义下一致有界；

D．摄动问题的参数(算子 L_i 的参数，右端函数 h 和边界 Γ)具有一定的光滑度，使得方程(2.39)($i\geqslant1$)，(2.40)($i\geqslant1$)右端的算子能逐次作用于方程(2.39)($i\geqslant0$)和(2.40)($i\geqslant0$)的解．

在这些条件下我们得到如下的结果：

定理 2 若条件 $A\sim D$ 成立，则摄动问题 A_ε 的解 u_ε(设 $z_n=\varepsilon^{n+1}Z_n$)：

$$u_\varepsilon=\left(w_0+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i w_i\right)+\varepsilon^k\sum_{r=0}^{n+k}\varepsilon^r\bar{v}_r+z_n, \tag{2.61}$$

其中 w_0 是退化问题 A_0 的解，w_i 是通过第一迭代过程在边界条件(2.48)下逐次解方程(2.39)求得的；$\bar{v}_i=\psi(\rho)v_i$ 是通过第二迭代过程在边界条件(2.49)下逐次解方程(2.40)求得的，这些方程关于变量 t 都是线性常系数常微分方程；余项 $z_n=O(\varepsilon^{n+1})$．

2-6 正则退化的充分条件 若特征方程

$$\lambda^{2k}\sum_{i=0}^{2l}\alpha_{2k+i}(\varphi)\lambda^i=0 \tag{2.27}$$

有 l 个根在左半平面上，按定义，称摄动问题 A_ε 正则退化为问题 A_0．现在要讨论的问题是，在什么条件下方程(2.27)有

l 个根在左半平面上？下面的引理 2 给出一个正则退化的充分条件.

在算子 L_{2k+i} 的表达式(2.2)中将 $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} u$ 换为 $(i\xi_1)^{\alpha_1}(i\xi_2)^{\alpha_2}\cdots(i\xi_n)^{\alpha_n}$，即有

$$\Pi_{2k+i}(\xi;x;L_{2k+i}) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=2k+i} a_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}(x) \times (i\xi_1)^{\alpha_1}(i\xi_2)^{\alpha_2}\cdots(i\xi_n)^{\alpha_n}, \tag{2.68}$$

其中 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是任意一个非零实向量．我们称表达式(2.68)为算子 L_{2k+i} 在点 x 的**特征型**．对于原来摄动算子 $L_\varepsilon = L_{2k} + \varepsilon L_{2k+1} + \cdots + \varepsilon^{2l} L_{2k+2l}$ 我们称表达式

$$\Pi_\varepsilon(\xi;x;L_\varepsilon) = \sum_{i=0}^{2l} \varepsilon^i \Pi_{2k+i}(\xi;x;L_{2k+i}) \tag{2.69}$$

是它的**广义特征型**．设

$$L_{\varepsilon 1} = \varepsilon L_{2k+1} + \varepsilon^2 L_{2k+2} + \cdots + \varepsilon^{2l} L_{2k+2l}, \tag{2.70}$$

则称表达式

$$\Pi_{\varepsilon 1}(\xi;x;L_{\varepsilon 1}) = \sum_{i=1}^{2l} \varepsilon^i \Pi_{2k+i}(\xi;x;L_{2k+i}) \tag{2.71}$$

是算子 $L_{\varepsilon 1}$ 的**广义特征型**.

引理 2 若算子 L_ε 的广义特征型(2.69)的实部是正的，即

$$\mathrm{Re}\Pi_\varepsilon(\xi;x_0;L_\varepsilon) \equiv \sum_{j=0}^{l} \varepsilon^{2j} \Pi_{2(k+j)}(\xi;x_0;L_{2(k+j)})$$

$$\geqslant C \sum_{j=0}^{l} \varepsilon^{2j} |\xi|^{2(k+j)}, \tag{2.72}$$

其中 x_0 是边界 Γ 上的任意一点，C 是与 x_0 无关的常数，$|\xi|^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$，则摄动问题 A_ε 正则退化为问题 A_0.

证明 根据前面讨论，在边界 Γ 的邻域 Γ_δ 内引进局部坐标系 $(\rho, \varphi) = (\rho, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$ 后算子 L_{2k+i} 有(2.13)的形式(包括 L_{2k} 中所有 $2k$ 阶偏导数项之和)，$x_0 = (0, \varphi_1^0, \cdots,$

φ_{n-1}^0). 令坐标 η_n 与 ρ 相对应，η_i 与 $\varphi_i(i<n)$ 相对应，则(2.13)的特征型为：

$$\widetilde{\Pi}_{2k+i}(\eta;\rho,\ \varphi,\ L_{2k+i})=\alpha_{2k+i}(\rho,\ \varphi)(i\eta_n)^{2k+i}+\sum_{j=1}^{2k+i}\times\sum_{s\leqslant j}\sum_{(s)}\beta_{j,(s)}(\rho,\ \varphi)(i\eta_n)^{2k+i-j}(i\eta_1)^{s_1}\cdots(i\eta_{n-1})^{s_{n-1}}, \tag{2.73}$$

算子 L_ε 的广义特征型为

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\eta;\rho,\ \varphi,\ L_\varepsilon)=\sum_{i=0}^{2l}\varepsilon^i\widetilde{\Pi}_{2k+i}(\eta;\rho,\ \varphi;L_{2k+i}). \tag{2.74}$$

条件(2.72)在此坐标变换下是不变的，即对于广义特征型(2.74)同样有

$$\operatorname{Re}\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\eta;0,\ \varphi^0,\ L_\varepsilon)=\sum_{j=0}^{l}\varepsilon^{2j}\widetilde{\Pi}_{2(k+j)}(\eta;0,\ \varphi^0;L_{2(k+j)})\geqslant D\sum_{j=0}^{l}\varepsilon^{2j}|\eta|^{2(k+j)}, \tag{2.75}$$

其中 $\eta=(\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_n)$ 是任意一个非零实向量，

$$|\eta|^2=\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2.$$

在 $\widetilde{\Pi}_\varepsilon$ 中令 $\eta_1=\cdots=\eta_{n-1}=0$，即只保留算子 ε^iL_{2k+i} 中与 $\varepsilon^i\alpha_{2k+i}(\varphi^0)\dfrac{\partial^{2k+i}}{\partial\rho^{2k+i}}$ 相应的项 $\varepsilon^i\alpha_{2k+i}(\varphi^0)(i\eta_n)^{2k+i}$. 因此

$$\widetilde{\Pi}_\varepsilon(0,\ \cdots,\ 0,\ \eta_n;0,\varphi^0,L_\varepsilon)=\sum_{i=0}^{2l}\varepsilon^i\alpha_{2k+i}(\varphi^0)(i\eta_n)^{2k+i}. \tag{2.76}$$

设方程(2.27)的左端为 $P_{2(k+l),\varphi}(\lambda)$：

$$P_{2(k+l),\varphi}(\lambda)\equiv\lambda^{2k}\sum_{i=0}^{2l}\alpha_{2k+i}(\varphi)\lambda^i=0. \tag{2.27}$$

那末

$$P_{2(k+l),\varphi^0}(i\varepsilon\eta_n)=\varepsilon^{2k}\sum_{i=0}^{2l}\varepsilon^i\alpha_{2k+i}(\varphi^0)(i\eta_n)^{2k+i}=\varepsilon^{2k}\widetilde{\Pi}_\varepsilon(0,\ \cdots,\ 0,\ \eta_n;0,\ \varphi^0,\ L_\varepsilon),$$

$$\varphi^0=(\varphi_1^0,\ \cdots,\ \varphi_{n-1}^0).$$

故有

$$\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}(0,\ \cdots,\ 0,\ \eta_n;0,\ \varphi^0,\ L_{\varepsilon})=\varepsilon^{-2k}P_{2(k+l),\varphi^0}(i\varepsilon\eta_n).\tag{2.77}$$

由(2.75)

$$\mathrm{Re}\widetilde{\Pi}_{\varepsilon}(0,\ \cdots,\ 0,\ \eta_n;0,\ \varphi^0,\ L_{\varepsilon})\geqslant D\sum_{j=0}^{l}\varepsilon^{2j}|\eta_n|^{2(k+j)}.$$

因此多项式 $P_{2(k+l)}(\lambda)$ 在虚轴上有正的实部. 按第一章 §5 引理 5 方程

$$\sum_{i=0}^{2l}\alpha_{2k+i}(\varphi)\lambda^{i}=0$$

有 l 个根在左半平面上. 从而证得引理的论断.

2-7 摄动问题 A_{ε} 的一致可解性

引理 3 若退化算子 L_{2k} 对于满足边界条件(2.6)的任意一个光滑函数 w 是正定的，即

$$(L_{2k}w,\ w)\geqslant\beta^2(\Sigma(D^kw,\ D^kw)+(w,\ w)),\tag{2.78}$$

并且算子 $L_{\varepsilon 1}$ 的广义特征型(2.71)有正的实部：

$$\mathrm{Re}\Pi_{\varepsilon 1}(\xi;x;L_{\varepsilon 1})=\sum_{j=1}^{l}\varepsilon^{2j}\Pi_{2(k+j)}(\xi;x;L_{2(k+j)})$$

$$\geqslant\alpha^2\sum_{j=1}^{l}\varepsilon^{2j}|\xi|^{2(k+j)},\tag{2.79}$$

其中 $\xi=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)$ 是任意一个实向量，$|\xi|^2=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$，$\alpha^2$ 是与 ξ 和 x 无关的常数，则摄动算子 L_{ε} 一致正定，即对于满足边界条件(2.6)，(2.7)一切光滑函数 u 有 $(L_{\varepsilon}u,\ u)\geqslant\beta^2(u,\ u)$，$\beta^2$ 是与 u，ε 无关的常数，并有下面能量不等式成立：

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{|k|=k}\varepsilon^{2j}\|D^{(k+j)}u\|^2+\sum_{|i|=0}^{k}\|D^iu\|^2$$

$$\leqslant C_1(L_{\varepsilon}u,\ u)\leqslant C_2\|h\|^2,\tag{2.80}$$

其中 u 是满足边界条件(2.6)，(2.7)的任意函数，$h=L_{\varepsilon}u$.

证明 这一定理的证明与第一章§3定理3的证明是类似的.

首先对于在边界长条内等于零的光滑函数 u 来建立不等式(2.80). 和第一章§3定理3一样, 主要导出估计式(参看第一章(3.19))

$$(\Lambda_\varepsilon u, u)\geqslant\beta^2\sum_{|j|=1}^{l}\sum_{|k|=k}\varepsilon^{2j}\|D^{(k+j)}u\|^2$$
$$-M\varepsilon\Big(\sum_{|k_1|=k}\|D^{(k)}u\|^2+\|u\|^2\Big),\quad(2.81)$$

其中 $\Lambda_\varepsilon=\sum_{i=1}^{l_1}\varepsilon^{2i}L_{2(k+i)}$ 是 L_ε 中系数含有 ε 的偶数阶偏导数项之和, $(j)=(j_1, \cdots, j_n)$, $|j|=j_1+j_2+\cdots+j_n$. 导出这一估计式的方法和第一章§3引理2中所用的方法是类似的. 当系数是常数时可利用 Fourier 变换

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\iint_{-\infty}^{+\infty}u(x)\,e^{-i\sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j}\,dx$$

得到. 对于变系数情形, 首先考虑只在 Q 的充分小子区域 $Q_1(Q_1\subset Q)$ 内异于零的函数 w. 利用类似于第一章§3(3.21)～(3.33)的推导, 对于函数 w 建立起估计式(2.81), 此时 δ 是子区域 Q_1 的直径. 再利用在 Q 的任一真闭子区域上成立的展开式 $1\equiv\sum_{i=1}^{N}\zeta_i(x)$ 以及类似于第一章§3(3.36)～(3.38)的推导以得到对于任意一个在 Q 的边界长条内等于零的光滑函数 u 都成立的估计式(2.81), 此时 $\zeta_i(x)$ 的支集的直径 δ_i 不大于 δ.

再用第一章§3引理2的最后证明方法证明这一估计式对于任意一个满足边界条件(2.6), (2.7)的光滑函数 u 亦成立.

除估计式(2.81)外, 类似地再建立 L_ε 中系数含有 ε 的奇

数阶偏导数项之和 M_ε 的估计式(参看第一章§3(3.41)). 最后利用这两个估计式可证得能量不等式(2.80), 证明的方法也是类似的(参看第一章§3定理2).

根据引理3我们有以下的推论.

推论 在引理3的条件下退化问题 A_0 唯一可解, 摄动问题 A_ε 一致可解并且退化是正则的.

事实上, 由条件(2.78)和不等式(2.80)推得, 算子 L_{2k} 和 L_ε 都是正定的: $(L_{2k}w, w)\geqslant\alpha^2(w, w)$($w$ 是任意一个满足边界条件(2.6)的光滑函数), $(L_\varepsilon u, u)\geqslant\alpha^2(u, u)$($u$ 是任意一个满足边界条件(2.6), (2.7)的光滑函数). 正定条件是问题 A_0 有唯一解和摄动问题 A_ε 一致可解的充分条件, 请读者参看[25]. 再由 L_{2k} 的椭圆性条件(2.4)和条件(2.78)推得特征型

$$\Pi_{2k}(\xi; x; L_{2k})=\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=2k}a_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)(i\xi_1)^{\alpha_1}\times\cdots\times(i\xi_n)^{\alpha_n}\geqslant\alpha^2|\xi|^{2k}.$$

从而由(2.79)推得引理2的条件(2.72), 故由引理2得到退化的正则性.

注1 根据 Гусева[26] 的证明(还有 Nirenberg 的工作[27],[28]), 若 $h\in W_2^{(\tau)}$, 则第一边值问题(2.5), (2.6), (2.7)的解 $u\in W_2^{(2(k+l)+\tau)}$.

注2 由于算子 L_{2k} 和 L_ε 都是偶数阶的椭圆型算子, 没有实的特征线, 因此不会产生象§1所遇到的特征线与边界 Γ 相切在切点邻域内的困难.

在定理2中我们讨论了渐近式(2.61)的余项估计. 如果方程右端 $h\in \overset{\circ}{W}{}_2^{(\sigma)}$, $\sigma=n+l+p$, 而方程的系数和边界充分光滑, 则对渐近式(2.61)可微分 p 次, 并可得到 p 阶导数的余项

估计，有如下的定理：

定理 3 若算子 L_ε 的广义特征型(2.69)的实部是正的，即有不等式(2.72)成立，在边界条件(2.6)下算子 L_{2k} 在(2.78)意义下是正定的，并且摄动问题 A_ε 的参数充分光滑，$h\in W_2^{(\sigma)}$，$\sigma=n+l+p(p\geqslant 2l)$，则摄动问题 A_ε 的解 u_ε 有渐近式(2.61)并可微分 p 次，余项 z_n 及其导数有如下估计式：

$$\sum_{|i|=1}^{2k}\|D^{(i)}z_n\|+\|z_n\|=O(\varepsilon^{n+1}),$$
$$\|D^{(2k+j)}z_n\|=O(\varepsilon^{n+1-j})\ (1\leqslant|j|\leqslant p), \tag{2.82}$$

确切地说在区域 Q 的内部子区域 Q'：$\bar{Q}'\subset Q$

$$\|D^{(2k+j)}z_n\|_{Q'}=O(\varepsilon^{n+1})\quad (1\leqslant|j|\leqslant p), \tag{2.83}$$

在边界 Γ 附近 $U(\Gamma)$：

$$\|D^{(2k+j)}z_n\|_{U(\Gamma)}=O(\varepsilon^{n+1-j})\quad (1\leqslant|j|\leqslant p). \tag{2.84}$$

这里的$\|\ \ \|=\|\ \ \|_{L_2}$.

这一定理的证明与定理 1 的证明类似，请读者参看[1].

例 考虑平板方程的第一边值问题：

$$L_\varepsilon u\equiv\varepsilon^2\Delta^2u-\Delta u=h,\ u|_\Gamma=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial\rho}\right|_\Gamma=0,$$

其中 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 是 Laplace 算子．设

$$L_\varepsilon=\varepsilon^2L_4+\varepsilon L_3+L_2,$$
$$L_4=\Delta^2=\Delta\Delta,\ L_2=-\Delta,\ L_3\equiv 0.$$

此时 $k=1$，$l=1$．在 Γ 的 δ 邻域 Γ_δ 内引进局部坐标(ρ,φ)．在新坐标系(ρ,φ)下

$$L_2=-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\cdots,\ L_4=\frac{\partial^4}{\partial\rho^4}+\cdots.$$

方程(2.27)为

$$Q_2(\lambda)=-1+\lambda^2=0.$$

此方程有一个正根和一个负根. 因此当 $\varepsilon\to 0$ 时问题 A_ε 正则退化为问题 A_0. 此外，由于

$$L_4=\Delta\Delta=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^2,$$

所以 $\quad \operatorname{Re}\Pi_{\varepsilon 1}(\xi;x;\varepsilon^2L_4)=\varepsilon^2\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^2=\varepsilon^2|\xi|^4.$

因此条件(2.79)成立. 条件(2.78)显然成立. 故此问题一致可解并有估计式(2.80)和定理 2 所述的结果.

§3 单一特征线方程

3-1 定义 设给定奇数阶偏微分方程

$$L_{2k+1}u\equiv M_1(M_{2k}u)+R_{2k}u=h, \tag{3.1}$$

其中 M_1 是一阶算子，M_{2k} 是 $2k$ 阶椭圆型算子，R_{2k} 是任意一个阶数不超过 $2k$ 的微分算子. 方程(3.1)称为**单一特征线方程**.

假定 D 是 n 维空间的有界区域，具有充分光滑的边界 Γ. 方程(3.1)是在 $D+\Gamma$ 内给定的. 显然，只有算子 M_1 的特征线才是方程(3.1)在区域 D 内的**实特征线**. 一般地，在 D 内的单一特征线方程有以下形式:

$$L_{2k+1}u\equiv M_{2k+1}u+R_{2k}u=h, \tag{3.2}$$

其中 M_{2k+1} 是奇数阶算子，它在 D 内每一点 $x\in D$ 有一条实特征线和 k 对复特征线.

我们只限于讨论 $M_1=\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ 的情形，即假定特征线是一族平行于 Ox_1 轴的直线.

我们假定，通过 D 内一点的任意一条特征线与区域 D 的边界 Γ 相交于两点，即直线 $x_i=C_i(i=2,\cdots,n)$ 与 Γ 交于

$P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$和$P^*(x_1^*, x_2, \cdots, x_n)$两点，其中$x_1=x_1(x_2, \cdots, x_n)$，$x_1^*=x_1^*(x_2, \cdots, x_n)$，$x_1^*>x_1$. 设$P$是特征线经过边界$\Gamma$进入区域$D+\Gamma$的«入口»点，$P^*$是«出口»点. 我们用$\Gamma_-$表示所有$P$点的全体，用$\Gamma_+$表示所有$P^*$点的全体(参看本章§1). Γ_-和Γ_+的交$\overline{\Gamma}_-\cap\overline{\Gamma}_+$是一$(n-2)$维点集$R$，它是特征线与边界$\Gamma$相切时切点的几何位置.

3-2 单一特征线方程第一边值问题的提法 在边界条件

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial\rho^s}\right|_\Gamma=0 \quad (s=0, 1, \cdots, k-1)$$
$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial\rho^k}\right|_{\Gamma_*}=0 \tag{3.3}$$

下解方程(3.1)的定解问题称为**单一特征线方程(3.1)的第一边值问题**，其中$\Gamma_*=\Gamma_-$或$\Gamma_*=\Gamma_+$.

在第一章§4我们曾讨论过一维情形的奇数$(2k+1)$阶单一特征线方程第一边值问题(参看第一章(4.10), (4.11), (4.12), (4.13)). 若方程(3.1)是一阶方程，则第一边值问题就是初值问题.

3-3 边界条件$\left.\frac{\partial^k u}{\partial\rho^k}\right|_{\Gamma_*}=0$的给定 设$2k$阶椭圆型算子$M_{2k}$有以下形式:

$$M_{2k}=\sum_{|\alpha|\le 2k}a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{3.4}$$

并且对任一个非零实向量ξ及任意一点$x\in D+\Gamma$它的特征多项式

$$P(x, \xi)=\sum_{|\alpha|=2k}a_\alpha(x)\xi^\alpha\ne 0. \tag{3.5}$$

和以前一样，这里$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$，$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$，$D_s=\frac{\partial}{\partial x_s}(s=1, \cdots, n)$，$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$.

如果我们在 Γ 附近引入局部坐标 $(\rho, \varphi)=(\rho, \varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1})$（其中 ρ 是沿 Γ 内法线的距离），则有（参看 § 2(2.13)）

$$M_{2k}\equiv\alpha_{2k}(\rho, \varphi)\frac{\partial^{2k}}{\partial\rho^{2k}}+\cdots, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}=\cos(\rho, x_1)\frac{\partial}{\partial\rho}+\cdots. \tag{3.7}$$

因而

$$L_{2k+1}=M_1(M_{2k})+R_{2k}=\alpha'_{2k+1}\frac{\partial^{2k+1}}{\partial\rho^{2k+1}}+\cdots, \tag{3.8}$$

其中

$$\alpha'_{2k+1}=\cos(\rho, x_1)\alpha_{2k}. \tag{3.9}$$

由于 M_{2k} 是 $2k$ 阶椭圆型算子，$\alpha_{2k}\neq0$ 并且有确定的符号，所以 α'_{2k+1} 在 R 外处处不为零并且在 Γ_- 和 Γ_+ 上有相反符号.

我们要求算子 L_{2k+1} 是正定算子，即对于满足边界条件(3.3)的任意光滑函数 u 有

$$(L_{2k+1}u, u)\geqslant\alpha^2(u, u). \tag{3.10}$$

上式左端经 k 次分部积分后得到

$$\begin{aligned}(L_{2k+1}u, u)&=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(M_{2k}u), u\right)+\cdots\\&=\iint\limits_D\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(B_k(u, u))+\cdots\right]dx,\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 B_k 是 u 的 k 阶导数的二次型，靠近边界在坐标系 (ρ, φ) 下它具有以下形式：

$$(-1)^k\alpha_{2k}\left(\frac{\partial^k u}{\partial\rho^k}\right)^2+\cdots, \tag{3.12}$$

其中未写出的项是至少含有关于 φ_i 导数的一些项.

如取边界条件(3.3)的最后一个条件在 Γ_+ 上，即 $\Gamma_*=\Gamma_+$，并在(3.11)中关于变量 x_1 积分一次，则得到

$$(L_{2k+1}u,\ u)=-\int_{\Gamma_-}\Big[(-1)^k\cos(\rho,\ x_1)\alpha_{2k}$$

$$\times\left(\frac{\partial^k u}{\partial\rho^k}\right)^2+\cdots\Big]d\Gamma+\cdots. \qquad (3.13)$$

在此情况下，因为 $\cos(\rho,\ x_1)>0$，故由正定性条件(3.10)推得

$$(-1)^{k+1}\alpha_{2k}|_{\Gamma_-}>0,$$

于是

$$(-1)^{k+1}a_{2k}(x)|_{\Gamma_-}>0. \qquad (3.14)$$

因此，当条件(3.14)成立时，边界条件(3.3)的最后一个条件可取在 Γ_+ 上，即

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial\rho^k}\right|_{\Gamma_*}=\left.\frac{\partial^k u}{\partial\rho^k}\right|_{\Gamma_+}=0.$$

所以，在 Γ_+ 上共有 $k+1$ 个边界条件，在 Γ_- 上共有 k 个边界条件.

类似地，若取 $\Gamma_*=\Gamma_-$，此时应有

$$(-1)^{k+1}a_{2k}(x)|_{\Gamma_+}<0. \qquad (3.15)$$

如此在 Γ_+ 上有 k 个边界条件，而在 Γ_- 上有 $k+1$ 个边界条件.

§4 单一特征线方程和椭圆型方程的相互退化

4-1 摄动问题的提法 设给定 k 阶偏微分算子 L_k:

$$L_k\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha(x)D^\alpha \qquad (4.1)$$

和 $k+r$ 阶偏微分算子 L_{k+r}:

$$L_{k+r}\equiv\sum_{|\alpha|=k+r}a_\alpha(x)D^\alpha\quad(r=1,\ 2,\ \cdots,\ l), \qquad (4.2)$$

这些偏微分算子作用在定义于 D 的函数 $u(x)=u(x_1,\cdots,x_n)$ 上. 假定这些微分算子中的系数都是 $D+\Gamma$ 内的充分光滑函数.

摄动问题 A_ε: 在相应边界条件下解方程

$$L_\varepsilon u \equiv L_k u + \sum_{r=1}^{l} \varepsilon^r L_{k+r} u = h \tag{4.3}$$

的第一边值问题.

退化问题 A_0: 在相应边界条件下解退化方程

$$L_k w \equiv \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha w = h \tag{4.4}$$

的第一边值问题.

问题 A_0 的边界条件是问题 A_ε 边界条件的一部分. 在下面讨论中如果 k 或 $k+l$ 是偶数, 则定解问题指的是偶数阶椭圆型方程第一边值问题. 如果 k 或 $k+l$ 是奇数, 则指的是奇数阶方程的第一边值问题. 我们在第一章 § 3～§ 5 曾根据 k 和 $k+l$ 的奇偶性讨论了四种可能的情形, 对偏微分方程来说亦有类似的讨论, 可将常微分方程边值问题的讨论结果推广到偏微分方程边值问题上来.

当 k 或 $k+l$ 是奇数时, 形如(3.3)边界条件的选取应要求相应算子 L_k 或 L_{k+l} 正定的必要条件(3.14)或(3.15)成立. 当算子 L_k 和 L_{k+l} 中有一算子是偶数阶时, 则假定它的特征型是正定的.

我们在前一节曾讨论过偶数阶椭圆型方程退化为偶数阶椭圆型方程的情形. 因此尚有以下三种可能情形:

1) 椭圆型方程($k+l=2(k_1+l_1)$)退化为单一特征线方程($k=2k_1+1$);

2) 单一特征线方程($k+l=2(k_1+l_1)+1$)退化为椭圆型方程($k=2k_1$);

3) 单一特征线方程($k+l=2(k_1+l_1)+1$)退化为单一特征线方程($k=2k_1+1$).

对于这三种情形有类似于引理 2 和引理 3 的结果, 即:

引理 4 摄动问题 A_ε 正则退化为问题 A_0 的充分条件是，对一切 $\xi\neq0$ 有不等式

$$\mathrm{Re}\Pi_\varepsilon(\xi;x;L_\varepsilon)=\mathrm{Re}\sum_{r=0}^{l}\varepsilon^r\Pi_{k+r}(\xi;x;L_{k+r})>0 \quad (4.5)$$

成立.

这一引理的证明和引理 2 的证明一样，归结为第一章所讨论过的类似情形.

引理 5 为了使算子 L_ε 一致正定，只须要求算子 L_k 在相应边界条件下是正定的，并且

$$\mathrm{Re}\Pi_{\varepsilon1}(\xi;x;L_{\varepsilon1})=\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\Pi_{2(k_1+j)}(\xi;x;L_{2(k_1+j)})$$

$$\geqslant\alpha^2\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}|\xi|^{2(k_1+j)}.$$

$$(k=2k_1), \quad (4.6)$$

$$\mathrm{Re}\Pi_{\varepsilon1}(\xi;x;L_{\varepsilon1})=\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}\Pi_{2(k_1+j)}(\xi;x;L_{2(k_1+j)})$$

$$\geqslant\alpha^2\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}|\xi|^{2(k_1+j)}$$

$$(k=2k_1+1). \quad (4.7)$$

这一引理的证明与引理 3 的证明类似，也是利用第一章 § 3～§ 5 的讨论.

对于这三种情形，我们又得到正则退化的充分条件在于正定的充分条件.

由于高阶的单一特征线方程问题的可解性和解的可微分性的研究还不够充分，因此不能从上面两个引理推出渐近式的一般性定理. 我们只列举一些特例来阐明椭圆型方程和单一特征线方程之间相互退化的其余三种情形.

4-2 高阶椭圆型方程退化为一阶偏微分方程 我们在

这一章§1讨论过二阶椭圆型方程第一边值问题退化为一阶偏微分方程的 Cauchy 问题．现在区域 $D+\Gamma$ 内讨论高阶椭圆型方程第一边值问题：

$$L_\varepsilon u \equiv \sum_{s=2}^{2l_1} \varepsilon^{s-1} L_s u + \frac{\partial u}{\partial x_1} + fu = h, \tag{4.8}$$

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \rho^s}\right|_\Gamma = 0 \ (s=0,\ 1,\ \cdots,\ l_1-1), \tag{4.9}$$

其中 L_{2l_1} 是具有正的特征型的椭圆型算子，$f(x) \geqslant \gamma^2 > 0$，$h(x)$ 是已知函数．

假定方程的系数、右端和边界 Γ 充分光滑．

这类问题在[29]中可找到它的应用．

我们假定算子 $L_{\varepsilon 1} = \sum_{s=2}^{2l_1} \varepsilon^{s-1} L_s$ 的广义特征型

$$\Pi_{\varepsilon 1}(\xi;\ x;\ L_{\varepsilon 1}) = \sum_{s=2}^{2l_1} \varepsilon^{s-1} \Pi_s(\xi;\ x;\ L_s) \tag{4.10}$$

的实部是正的，即

$$\mathrm{Re}\,\Pi_{\varepsilon 1}(\xi;\ x;\ L_{\varepsilon 1}) = \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1} \Pi_{2j}(\xi;\ x;\ L_{2j}) \geqslant \sum_{j=1}^{l_1} \varepsilon^{2j-1} |\xi|^{2j}. \tag{4.11}$$

当 $\varepsilon=0$ 时方程(4.8)退化为一阶偏微分方程

$$L_1 w \equiv \frac{\partial w}{\partial x_1} + f(x) w = h. \tag{4.12}$$

为了使得算子 L_1 是正定的，按条件(3.15)(此时 $k=2k_1+1$，$k_1=0$) w 应满足的边界条件需给在 Γ_- 上：

$$w|_{\Gamma_-} = 0. \tag{4.13}$$

问题(4.12)，(4.13)是与摄动问题(4.8)，(4.9)相应的退化问题，前者称为问题 A_ε，后者称为问题 A_0．

当 $\varepsilon=0$ 时摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0，在边界 Γ_- 附近将失去 l_1-1 个边界条件，在边界 Γ_+ 附近将失去 l_1 个边界

条件.

对于我们所讨论的问题有两个类似的引理.

引理 4′ 若条件(4.11)成立, 则问题 A_ε 正则退化为问题 A_0.

证明 和引理 2 的证明类似. 在 Γ_- 邻域内引进局部坐标系 $(\rho,\ \varphi)=(\rho,\ \varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_{n-1})$. 将算子 L_ε 中各个算子表示为新坐标系的形式(参看(2.13)). 设 x_0 是边界 Γ_- 上的任意一点, 它可表示为 $x_0=(0,\ \varphi_1^0,\ \cdots,\ \varphi_{n-1}^0)$, 并令坐标 η_n 与 ρ 相对应, η_i 与 $\varphi_i(i<n)$ 相对应, 则 L_ε 的广义特征型有如下形式:

$$
\begin{aligned}
\Pi_\varepsilon(\xi;\ x;\ L_\varepsilon)&=\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\eta;\ \rho,\ \varphi;\ L_\varepsilon)\\
&=\sum_{s=2}^{2l_1}\varepsilon^{s-1}\widetilde{\Pi}_s(\eta,\ \rho,\ \varphi;\ L_s)\\
&\quad+i(\eta_1\cos(\varphi_1,\ x_1)+\cdots+\eta_n\cos(\rho,\ x_1)).
\end{aligned}\tag{4.14}
$$

在点 $x_0=(0,\ \varphi_1^0,\ \cdots,\ \varphi_{n-1}^0)$ 上

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Pi}_\varepsilon(\eta;\ 0,\ \varphi^0;\ L_\varepsilon)=&\sum_{s=2}^{2l_1}\varepsilon^{s-1}\widetilde{\Pi}_s(\eta;\ 0,\ \varphi^0;\ L_s)\\
&+i(\eta_1\cos(\varphi_1,\ x_1)+\cdots+\eta_n\cos(\rho,\ x_1)),
\end{aligned}\tag{4.15}
$$

其中 $\varphi^0=(\varphi_1^0,\ \cdots,\ \varphi_{n-1}^0)$.

在第二迭代过程中所得到的特征方程有如下形式:

$$
P_{2l_1}(\lambda)=\lambda Q_{\varphi^0}(\lambda)=\sum_{r=0}^{2l_1-1}\alpha_{1+r}(\varphi^0)\lambda^{1+r}=0,\tag{4.16}
$$

其中 $\alpha_1(\varphi^0)=\cos(\rho,\ x_1)|_{x^0}$. 按引理 2 的证明步骤可证得

$$
\widetilde{\Pi}_\varepsilon(0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \eta_n;\ 0,\ \varphi^0,\ L_\varepsilon)=\varepsilon^{-1}P_{2l_1}(i\varepsilon\eta_n).\tag{4.17}
$$

条件(4.11)在坐标变换下是不变的, 即有

$$\mathrm{Re}\widetilde{\Pi}_{\varepsilon 1}(\eta;0,\ \varphi^0;\ L_{\varepsilon 1})=\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}\widetilde{\Pi}_{2j}(\eta;0,\ \varphi^0;\ L_{2j})$$
$$\geqslant\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j-1}|\eta|^{2j}.$$

从而我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}P_{2l_1}(i\varepsilon\eta_n)&=\varepsilon\mathrm{Re}\widetilde{\Pi}_\varepsilon(0,\ \cdots,\ 0,\ \eta_n;0,\ \varphi^0,\ L_\varepsilon)\\&=\varepsilon\mathrm{Re}\widetilde{\Pi}_{\varepsilon 1}(0,\ \cdots,\ 0,\ \eta_n;0,\ \varphi^0,\ L_\varepsilon)\\&=\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}\widetilde{\Pi}_{2j}(0,\ \cdots,\ 0,\ \eta_n;0,\ \varphi^0;\ L_{2j})\\&\geqslant\sum_{j=1}^{l_1}\varepsilon^{2j}|\eta_n|^{2j}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

此外，多项式 $P_{2l_1}(\lambda)$ 的最低次项系数

$$\alpha_1(\varphi^0)=\cos(\rho,\ x_1)|_{\varphi^0}>0,$$

因此它在虚轴上有正的实部. 按第一章 § 5 引理 6，方程(4.16)在左半平面上有 l_1-1 个根. 因此在边界 Γ_- 附近退化是正则的.

同理，可以证明在边界 Γ_+ 附近退化也是正则的.

引理 5′ 若条件(4.11)成立，并且 $f(x)\geqslant\gamma^2>0$，则算子 L_ε 一致正定，因而摄动问题 A_ε 一致可解.

这一引理的证明和引理 3 的证明完全一样，从略.

构造问题 A_ε 渐近解的基本迭代过程和 § 1 类似，但由于在 Γ_- 和 Γ_+ 附近都必须构造边界层函数，因此构造过程要复杂一些. 在边界 Γ_- 和 Γ_+ 构造了边界层函数 v_- 和 v_+ 以后还必须以平滑函数 ψ 将它们"粘合"起来(参看第一章 § 2)以得到除交集 $\overline{\Gamma}_-\cap\overline{\Gamma}_+$ 邻域外在 D 内处处有定义的边界层函数 v，从而问题 A_ε 的解 u_ε 有如下的渐近式:

$$u_\varepsilon=\sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i w_i+\sum_{j=0}^{m+1}\varepsilon^j v_j+z_m,\tag{4.19}$$

$$L_\varepsilon z_m=\varepsilon^{m+1}g_m,\tag{4.20}$$

其中 g_m 在 $\widetilde{D}=D-U(R)$ 内是一有界函数，并且在 $\widetilde{D}$ 内

$$\sum_{|j|=1}^{l}\varepsilon^{2j-1}\|D^{(j)}z_m\|_{\widetilde{D}}^2+\|z_m\|_{\widetilde{D}}^2\leqslant C\varepsilon^{2(m+1)}. \qquad (4.21)$$

于是有以下的定理：

定理 4 若摄动问题 A_ε 的参数充分光滑，并且条件(3.26)成立，则问题 A_ε 的解 u_ε 有渐近式(4.19)，其中 w_0 是退化问题(4.12)，(4.13)的解，w_i 通过第一迭代过程得到，v_i 是边界层类型函数，z_m 是余项，它有估计式(4.21)。

这一定理的证明与定理 1 类似，读者可参看[1]。

4-3 椭圆型方程退化为单一特征线方程 在矩形 Q：$(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$ 内讨论下面第一边值问题(问题 A_ε)：

$$L_\varepsilon u\equiv\varepsilon\Delta\Delta u+\frac{\partial}{\partial x}\Delta u=h(x,\ y), \qquad (4.22)$$

$$u|_\Gamma=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma=0. \qquad (4.23)$$

当 $\varepsilon=0$ 时方程(4.22)退化为($k_1=1$)

$$L_3 w\equiv\frac{\partial}{\partial x}\Delta w=h(x,\ y). \qquad (4.24)$$

按正定性条件(3.14)，方程(4.24)的边界条件应给定为

$$w|_\Gamma=0,\ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a}=0. \qquad (4.25)$$

下面我们将看到，边界条件如此给定也保证了问题(4.22)，(4.23)正则退化为问题(4.24)，(4.25)(问题 A_0)。问题 A_0 的解 w 可用 Fourier 方法求之。即求具有以下形式的级数解：

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}C_n(x)\sin ny. \qquad (4.26)$$

将它代入方程(4.24)得到确定 $C_n(x)$ 的常微分方程

$$C_n''(x)-n^2C_n'(x)=h_n(x), \qquad (4.27)$$

其中 $h_n(x)$ 是方程右端 $h(x, y)$ 按函数系 $\{\sin ny\}$ 展开的 Fourier系数:

$$h(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(x)\sin ny.$$

再由边界条件(4.25),得到 $C_n(x)$ 应满足的边界条件

$$C_n(0)=C_n(a)=0,\ C'_n(a)=0. \tag{4.28}$$

显然,问题(4.27),(4.28)有唯一解,并且

$$\|C'''_n\|^2+n^2\|C''_n\|^2+n^4\|C'_n\|^2+n^4\|C_n\|^2$$
$$+n^2\|C'_n\|^2+\|C''_n\|^2\leqslant k\|h_n\|^2. \tag{4.29}$$

其中 $\|\ \|=\|\ \|_{L_2(0,a)}$, K 是与 n 和 $h_n(x)$ 无关的常数. 因此退化问题(4.24),(4.25)的解具有方程(4.24)中所出现的导数以及低阶导数,这些导数属于 $L_2(Q)$ 并且有如下估计:

$$\sum_{|i|\leqslant 2}\left\|\frac{\partial}{\partial x}D^{(i)}w\right\|_Q^2+\sum_{|i|\leqslant 2}\|D^iw\|_Q^2\leqslant C\|h\|_Q^2. \tag{4.30}$$

现在来构造问题 A_ε 的渐近解.

当 $\varepsilon=0$ 时在区域 Q 的三条边 $\Gamma_1(y=0,0\leqslant x\leqslant a)$, $\Gamma_2(y=\pi,\ 0\leqslant x\leqslant a)$ 和 $\Gamma_3(x=0,\ 0\leqslant y\leqslant\pi)$ 上各失去一个边界条件,必须在这三条边邻域内分别来构造边界层函数. 我们知道,方程(4.24)的实特征线是平行于 Ox 轴的直线,即 $y=\text{const}$. 因此边界 Γ_1 和 Γ_2 都是方程(4.24)的特征线,是特征边界.

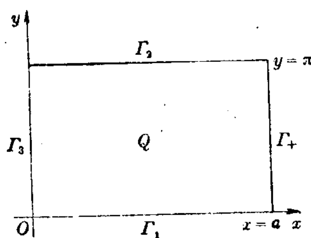


图 4

在 $\Gamma_1(y=0,\ 0\leqslant x\leqslant a)$ 邻域内作变量 y 的伸长变换:

$$t=y/\sqrt{\varepsilon}, \tag{4.31}$$

将算子 L_ε 作第二次分解,得到它的主要部分,亦即边界层校

正项中一次近似应满足的方程

$$M_0 v \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{4.32}$$

我们要求 $v+w$ 满足边界条件

$$(v+w)|_{x=a}=0,\ (v+w)|_{y=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(v+w)|_{y=0}=0.$$

如此得到函数 v 应满足的边界条件

$$\begin{aligned} &v|_{x=a} = -w|_{x=a}=0,\ v|_{y=0} = -w|_{y=0}=0, \\ &\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = -\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

设 $-\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = \varphi(x)$. 显然, $\varphi(a)=0$, $\varphi'(a)=0$. 我们假定, 当 $x<0$ 时 $\varphi(x)\equiv 0$. 现在在区域 $D(x<a,\ y>0)$ 内解边值问题(4.32), (4.33). 应指出, 方程(4.32)已不是常微分方程. 令 $p=\frac{\partial v}{\partial y}$, 则得到区域 D 内关于函数 p 的边值问题:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{4.34}$$

$$p|_{x=a}=0, \quad p|_{y=0}=\varphi(x). \tag{4.35}$$

作变量代换 $x_1=a-x$, 则方程(4.34)化为

$$\varepsilon \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0. \tag{4.34'}$$

这是一抛物型偏微分方程, 它在边界条件(4.35)下的解为

$$p = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{x_1} \frac{y}{\sqrt{\varepsilon}\,(x_1-\xi)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon(x_1-\xi)}} \varphi(a-\xi)\,d\xi. \tag{4.36}$$

因此

$$v=\int_0^y p dy. \tag{4.37}$$

显然，v 是边值问题(4.32)，(4.33)的解，它具有边界层性质．将它乘上平滑函数 $\psi\left(\frac{y}{\delta}\right)$ 并表示为：

$$v_1=\psi\left(\frac{y}{\delta}\right)v. \tag{4.38}$$

这就是在 $y=0$ 附近要构造的边界层函数．

同理，在 $y=\pi$ 附近构造边界层函数

$$v_2=\psi\left(\frac{\pi-y}{\delta}\right)v. \tag{4.39}$$

此时 v 是方程

$$\begin{aligned} M_0 v &\equiv \varepsilon^2\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ &=\frac{\partial^4 v}{\partial t_1^4}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2}=0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

在边界条件

$$(v+w)|_{x=a}=0,\ (v+w)|_{y=\pi}=0,$$
$$\left.\frac{\partial(v+w)}{\partial y}\right|_{y=\pi}=0$$

下，即

$$\begin{aligned} &v|_{x=a}=-w|_{x=a}=0, \quad v|_{y=\pi}=-w|_{y=\pi}=0, \\ &\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=\pi}=-\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=\pi}=\varphi_1(x) \end{aligned} \tag{4.41}$$

下的解，其中 $t_1=(\pi-y)/\sqrt{\varepsilon}$，$v_2$ 也是边界层函数．

最后，在 $\Gamma_3(x=0)$ 附近构造边界层函数．和前面一样在 $x=0$ 附近作伸长变换 $z=x/\varepsilon$；则得到算子 L_ε 第二次分解中的主要部分：

$$M_1 v\equiv\varepsilon^4\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+\varepsilon^3\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\equiv\frac{\partial^4 v}{\partial z^4}+\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}=0. \tag{4.42}$$

这是边界层校正项在 $x=0$ 附近一次近似 v 应满足的方程，是关于变量 $x(x=\rho)$ 的常微分方程. 我们要求 v 与 w, v_1, v_2 之和满足下列边界条件：

$$(v+w+v_1+v_2)|_{x=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(v+w+v_1+v_2)|_{x=0}=0,$$

即

$$\left.\begin{aligned}&v|_{x=0}=-(w+v_1+v_2)|_{x=0}=-(v_1+v_2)|_{x=0}=\varphi_1(y),\\&\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=-\left.\frac{\partial(w+v_1+v_2)}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi_2(y).\end{aligned}\right\}\tag{4.43}$$

显然，$\varphi_1(y)=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$, $\varphi_2(y)=O(1)$. 为了求得 v，只须在边界条件(4.43)下解方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial v}{\partial z}=0$$

即可. 它的特征方程有一负根：$\lambda=-1$. 显然，

$$v=\varphi_1(y)+\varepsilon\varphi_2(y)-\varepsilon\varphi_2(y)e^{-\frac{x}{\varepsilon}}=O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})+O(\varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}},\tag{4.44}$$

并具有边界层性质. 此外，由边界条件(4.33), (4.41)以及平滑函数的性质在(4.43)的右端函数 $w+v_1+v_2$ 及其关于 x, y 的偏导数在点(0, 0), (0, π)等于零. 设

$$v_3=\psi\left(\frac{x}{\sigma}\right)v,$$

则 v_3 就是我们要求的在 $x=0$ 邻域内的边界层函数.

根据上面的构造过程，我们看到，退化问题的边界条件给定为(3.40)，保证了边界层校正项中的函数具有边界层性质，因此退化是正则的.

如此我们得到摄动问题(4.22), (4.23)解 u_ε 的渐近表

示：

$$u_\varepsilon = w + v_1 + v_2 + v_3 + z, \tag{4.45}$$

其中 z 是余项，它在整个边界 Γ 上满足边界条件(4.23)．可以证明，若 $h(x, y) \in L_2$，则有

$$\sum_{|i|=2} \varepsilon \|D^{(i)} z_1\|^2 + \sum_{|j|=1} \|D^{(j)} z_1\|^2 + \|z_1\|^2 \leqslant C\varepsilon, \tag{4.46}$$

其中 $z_1 = e^{kx} z$，k 是一小的正数．从而有

$$\|D^{(i)} z\| = O(1)\,(|i|=2);\quad \|D^{(j)} z\| = O(\sqrt{\varepsilon})\,(|j| \leqslant 1), \tag{4.47}$$

$$\left.\begin{aligned} u_\varepsilon &= W + (v_1 + v_2 + v_3) + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ D^{(j)} u_\varepsilon &= D^{(j)} W + D^{(j)}(v_1 + v_2 + v_3) + O(\sqrt{\varepsilon}),\ |j| = 1, \\ D^{(i)} u_\varepsilon &= D^{(i)} W + D^{(i)}(v_1 + v_2 + v_3) + O(1),\ |i| = 2. \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

应用前面所述的迭代过程，对于充分光滑的右端函数 $h(x, y)$ 可以构造 u_ε 的高阶渐近式．

4-4 单一特征线方程退化为椭圆型方程 在矩形区域 $Q(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ 内讨论单一特征线方程第一边值问题(问题 A_ε)：

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \Delta u - \Delta u = h, \tag{4.49}$$

$$u|_\Gamma = 0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, \tag{4.50}$$

其中 Γ 是矩形 Q 的边界．当 $\varepsilon = 0$ 时问题 A_ε 退化为问题 A_0:

$$L_0 w \equiv -\Delta w = h, \tag{4.51}$$

$$w|_\Gamma = 0. \tag{4.52}$$

因此当问题 A_ε 退化为问题 A_0 时在 Γ 的一部分 $\Gamma_1(x = a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ 上失去一个边界条件．下面将看到，边界条件如此给定，退化是正则的．

在 $x=a$ 附近将算子 L_ε 作第二次分解. 为此取 $\rho=a-x$, $\varphi=y$, 伸长变换 $t=\rho/\varepsilon$. 我们得到一次近似 v_0 应满足的方程

$$M_0v_0\equiv-\varepsilon^3\frac{\partial^3 v_0}{\partial\rho^3}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\rho^2}\equiv-\frac{\partial^3 v_0}{\partial t^3}-\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}=0. \tag{4.53}$$

要求 v_0 与退化问题的解 w 之和满足下面边界条件:

$$\left.\frac{\partial(v_0+w)}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=0,\quad (v+w)|_{\rho=0}=0.$$

如此得到 v_0 应满足的边界条件

$$\left.\frac{\partial v_0}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=-\left.\frac{\partial w}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}$$

$$\left(设\ f(y)=-\left.\frac{\partial w}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=a}\right), \tag{4.54}$$

$$v_0|_{\rho=0}=-w|_{x=a}=0. \tag{4.55}$$

方程(4.53)的特征方程有一个根是负的: $\lambda=-1$. 于是问题(4.53), (4.54)的解有以下形式:

$$v_0=-\varepsilon f(y)e^{-\frac{\rho}{\varepsilon}}=-\varepsilon f(y)e^{-\frac{a-x}{\varepsilon}}, \tag{4.56}$$

为了使得 v_0 满足边界条件(4.55), 对 v_0 尚须作如下修改:

$$\bar{v}_0=-\varepsilon f(y)\left(e^{-\frac{a-x}{\varepsilon}}-1\right). \tag{4.57}$$

这是边界层类型函数, 因此退化是正则的. 最后再令

$$\tilde{v}_0=\psi\left(\frac{a-x}{\delta}\right)\bar{v}_0. \tag{4.58}$$

于是我们得到问题 A_ε 解 u_ε 的一次近似渐近式:

$$u_\varepsilon=w+\tilde{v}_0+z. \tag{4.59}$$

对余项 z 亦可作出类似的估计.

4-5 单一特征线方程退化为单一特征线方程 在正方形 $D(0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant1)$ 内讨论单一特征线方程第一边值问题(问题 A_ε):

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}(\Delta u) - \varepsilon \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + u = h, \tag{4.60}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0. \tag{4.61}$$

相应的退化问题 A_0:

$$L_1 w \equiv \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + w = h, \tag{4.62}$$

$$w|_{x=0} = 0, \; w|_{y=0} = 0. \tag{4.63}$$

当我们构造了边界层函数以后将会看到，退化问题的边界条件如此给定使退化是正则的．摄动问题 A_ε 退化为 A_0 时将在 D 的边界 $\Gamma_1(x=1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$ 上失去两个边界条件，在边界 $\Gamma_2(y=1,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$ 上失去一个边界条件．

为简单起见，假定方程右端 $h(x,y)$ 在 D 的对角线 BC 上等于零，使得退化问题 A_0 的解在 BC 上不出现裂缝，其中 $B=B(0,\ 0)$，$C=C(1,\ 1)$．

在 Γ_1 附近取 $\rho=1-x$，$t=\rho/\varepsilon$，则有

$$\begin{aligned}\varepsilon L_\varepsilon v \equiv & -\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ & -\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \rho} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} + \varepsilon v \\ = & -\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial y} + v\right) \\ & + \varepsilon^2\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial y^2}\right).\end{aligned} \tag{4.64}$$

它的主要部分是

$$M_0^{(1)} v \equiv -\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t}. \tag{4.65}$$

于是得到在 Γ_1 附近边界层校正项中一次近似 $v_0^{(1)}$ 满足的方程

$$M_0^{(1)}v_0^{(1)}=0. \tag{4.66}$$

我们要求 $v_0^{(1)}$ 与 w 之和应满足边界条件

$$(v_0^{(1)}+w)\big|_{x=1}=0,$$

$$\left.\frac{\partial(v_0^{(1)}+w)}{\partial x}\right|_{x=1}=0.$$

即 $v_0^{(1)}$ 应满足的边界条件是:

$$v_0^{(1)}\big|_{x=1}=-w\big|_{x=1}, \tag{4.67}$$

$$\left.\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=1}=-\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=1}. \tag{4.68}$$

方程(4.66)的特征方程有两个具有负的实数部分的根:

$$-\lambda_{1,2}=-\left(\frac{1}{2}\pm\frac{i}{2}\sqrt{3}\right).$$

因此方程(4.66)的解为

$$\begin{aligned}v_0^{(1)}&=\varphi_1(y)e^{-\lambda_1 t}+\varphi_2(y)e^{-\lambda_2 t}\\&=\varphi_1(y)e^{-\frac{\lambda_1(1-x)}{\varepsilon}}+\varphi_2(y)e^{-\frac{\lambda_2(1-x)}{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

由边界条件(4.67)和(4.68)可确定 $\varphi_1(y)$和 $\varphi_2(y)$:

$$\left.\begin{aligned}&v_0^{(1)}\big|_{x=1}=\varphi_1(y)+\varphi_2(y)=-w\big|_{x=1},\\&\left.\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial x}\right|_{x=1}=\frac{\lambda_1}{\varepsilon}\varphi_1(y)+\frac{\lambda_2}{\varepsilon}\varphi_2(y)=-\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=1}.\end{aligned}\right\} \tag{4.69}$$

我们还可以构造二次近似 $v_1^{(1)}$ 对 $v_0^{(1)}$ 进一步精确化. 函数 $v_1^{(1)}$ 是下面问题的解:

$$M_0^{(1)}v_1^{(1)}=-R_1^{(1)}v_0^{(1)}=-\left(\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial y}+v_0^{(1)}\right), \tag{4.70}$$

$$v_1^{(1)}\big|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial t}\right|_{t=0}=0. \tag{4.71}$$

显然,

$$v_1^{(1)}=(t\alpha_1(y)+\beta_1(y))e^{-\lambda_1 t}+(t\alpha_2(y)+\beta_2(y))e^{-\lambda_2 t}$$

$$=P_1\left(\frac{x}{\varepsilon},\ y\right)e^{-\lambda_1\frac{1-x}{\varepsilon}}+P_2\left(y,\ \frac{x}{\varepsilon}\right)e^{-\lambda_2\frac{1-x}{\varepsilon}}, \qquad (4.72)$$

其中 α_1, α_2, β_1, β_2 用 φ_1, φ_2, φ_1', φ_2' 表示,

$$P_1\left(\frac{x}{\varepsilon},\ y\right)=\frac{1-x}{\varepsilon}\alpha_1(y)+\beta_1(y),$$

$$P_2\left(\frac{x}{\varepsilon},\ y\right)=\frac{1-x}{\varepsilon}\alpha_2(y)+\beta_2(y).$$

我们取函数

$$\tilde{v}_1^{(1)}=\psi\left(\frac{1-x}{\delta}\right)(v_0^{(1)}+\varepsilon v_1^{(1)}) \qquad (4.73)$$

为 Γ_1 附近的边界层函数.

在 Γ_2 附近取 $\rho=1-y$, $t=\dfrac{1-y}{\varepsilon}$,我们有

$$\varepsilon L_\varepsilon v\equiv-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial v}{\partial t}+\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial v}{\partial x}+v\right]$$

$$-\varepsilon^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varepsilon^3\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \qquad (4.74)$$

它的主要部分是:

$$M_0^{(2)}v\equiv-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial v}{\partial t}. \qquad (4.75)$$

于是得到在 Γ_2 附近边界层校正项中一次近似 $v_0^{(2)}$ 应满足的方程是:

$$M_0^{(2)}v_0^{(2)}=0. \qquad (4.76)$$

我们要求 $v_0^{(2)}$ 与 $\tilde{v}_1^{(1)}$, w 之和满足边界条件:

$$(v_0^{(2)}+\tilde{v}_1^{(1)}+w)\big|_{y=1}=0,$$

如此得到 $v_0^{(2)}$ 应满足的边界条件

$$v_0^{(2)}\big|_{t=0}=v_0^{(2)}\big|_{y=1}=-(\tilde{v}_1^{(1)}+w)\big|_{y=1}. \qquad (4.77)$$

方程(4.75)的边界层解是:

$$v_0^{(2)}=\beta(x)e^{-t}=\beta(x)e^{-\frac{1-y}{\varepsilon}}, \tag{4.78}$$

其中 $\beta(x)$是由边界条件(4.77)确定. 和上面一样再构造二次近似 $v_1^{(2)}$ 对 $v_0^{(2)}$ 进一步精确化. 函数 $v_1^{(2)}$ 是下面问题的解:

$$M_0^{(2)}v_1^{(2)}=-R_1^{(2)}v_0^{(2)}$$

$$=-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v_0^{(2)}}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x}+v_0^{(2)}\right], \tag{4.79}$$

$$v_1^{(2)}\big|_{t=0}=v_1^{(2)}\big|_{y=1}=0. \tag{4.80}$$

我们取

$$\tilde{v}_1^{(2)}=\psi\left(\frac{1-y}{\sigma}\right)(v_0^{(2)}+\varepsilon v_1^{(2)}) \tag{4.81}$$

作为 Γ_2 附近的边界层函数. 于是我们得到问题 A_ε 解 u_ε 的渐近式如下:

$$u_\varepsilon=w+\tilde{v}_1^{(1)}+\tilde{v}_1^{(2)}+z, \tag{4.82}$$

其中 z 是余项,它满足方程

$$L_\varepsilon z=L_\varepsilon(u_\varepsilon-(w+\tilde{v}_1^{(1)}+\tilde{v}_1^{(2)}))$$

$$=h-h-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}(\Delta w)+\varepsilon\Delta w-L_\varepsilon\tilde{v}_1^{(1)}$$

$$-L_\varepsilon\tilde{v}_1^{(2)}=O(\varepsilon) \tag{4.83}$$

和边界条件

$$z|_\Gamma=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=1}=0. \tag{4.84}$$

可以证明,

$$\|z\|_{L_2(D)}=O(\varepsilon),\ \|Dz\|_{L_2(D)}=O(\varepsilon). \tag{4.85}$$

§5 一些特殊类型的边界层

5-1 抛物边界层 我们在这一章§1的一开始曾指出,方程(1.16)当 $\varepsilon=0$ 时退化为一阶偏微分方程(1.19),如果所

讨论区域 Q 的边界 Γ 的一部分包含了退化算子 L_1 的特征线，则 Γ 是为特征边界。对于特征边界来说，要构造的边界层函数不再是通过解常系数常微分方程得到，例如我们在上一节(§ 4)所讨论的问题(4.22)，(4.23)，边界 $y=0$ 和 $y=\pi$ 都是退化方程的特征线，在这两条边界附近构造边界层函数是通过解抛物型方程边值问题求得的，按 Люстерник 和 Вишик 的观点称它为抛物边界层。现在就椭圆型方程奇异摄动问题来阐明这样边界层的一些特性。

1) 在矩形 $Q(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b)$ 内讨论第一边值问题(问题 A_ε)：

$$L_\varepsilon u\equiv \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial x}-u=h, \tag{5.1}$$

$$u|_\Gamma=0. \tag{5.2}$$

相应的退化问题(问题 A_0)：

$$L_0 w_0\equiv\frac{\partial w_0}{\partial x}-w_0=h, \tag{5.3}$$

$$w_0|_{x=a}=0. \tag{5.4}$$

退化方程(5.3)是一阶偏微分方程，直线 $y=\text{const}$ 是它的特征线。当问题 A_ε 退化为问题 A_0 时分别在 $\Gamma_1(0\leqslant x\leqslant a,\ y=0)$，$\Gamma_2(0\leqslant x\leqslant a,\ y=b)$ 和 $\Gamma_3(0\leqslant y\leqslant b,\ x=0)$ 三条边上各失去一个边界条件。为了构造问题 A_ε 的渐近解，必须在这三条边的附近构造边界层函数。

在 Γ_1 附近引进伸长变换 $y=\varepsilon t,\ t=y/\varepsilon$，则算子 L_ε 在 Γ_1 附近得到第二次分解：

$$L_\varepsilon u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-u+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=M_0^{(1)}u+\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{5.5}$$

其中

$$M_0^{(1)}u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}-u \tag{5.6}$$

是其主要部分．因此边界层校正项中一次近似 $v_0^{(1)}$ 应满足方程：

$$M_0^{(1)}v_0^{(1)} \equiv \frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial t^2}+\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial x}-v_0^{(1)}=0. \tag{5.7}$$

我们要求 $v_0^{(1)}$ 满足边界条件

$$(v_0^{(1)}+w_0)\,|_{y=0}=(v_0^{(1)}+w_0)\,|_{t=0}=0,$$

$$(v_0^{(1)}+w_0)\,|_{x=a}=0,$$

即

$$v_0^{(1)}\,|_{x=a}=0,\ \ v_0^{(1)}\,|_{t=0}=-w_0(x,\ 0). \tag{5.8}$$

为此必须在区域 $D(x<a,\ t>0)$ 内解问题(5.7)，(5.8)．方程(5.7)是抛物型方程，问题(5.7)，(5.8)是半有界直线上抛物型方程边值问题，其中变量 x 起时间变量作用．我们可以求出这一问题解的具体表达式． 令 $x_1=a-x$，则方程(5.7)变为

$$\frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial x_1}-v_0^{(1)}=0.$$

再令 $v_0^{(1)}=e^{a-x_1}V_0^{(1)}(x_1,\ t)$，则有

$$\frac{\partial^2 V_0^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{\partial V_0^{(1)}}{\partial x_1}=0. \tag{5.9}$$

由(5.8)

$$\begin{aligned} &V_0^{(1)}\,|_{x_1=0}=0,\\ &V_0^{(1)}\,|_{t=0}=-e^{-(a-x_1)}w_0(a-x_1,\ 0)=\varphi(x_1). \end{aligned} \tag{5.10}$$

显然，(5.9)，(5.10)的解为

$$V_0^{(1)}(x_1,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}\frac{t}{(x_1-\xi)^{3/2}}e^{-\frac{t^2}{4(x_1-\xi)}}\varphi(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}\frac{y}{\varepsilon(x_1-\xi)^{3/2}}e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon^2(x_1-\xi)}}\varphi(\xi)d\xi.$$

从而得到问题(5.7), (5.8)的解

$$v_0^{(1)}(x_1,\ t)=v_0^{(1)}\left(x_1,\ \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{e^{a-x_1}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}\frac{y}{\varepsilon(x_1-\xi)^{3/2}}e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon^2(x_1-\xi)}}\varphi(\xi)d\xi. \tag{5.11}$$

由此表达式看出，函数 $v_0^{(1)}$ 在边界 $\Gamma_1(0\leqslant x\leqslant a,\ y=0)$附近具有边界层性质：当 $y\geqslant\delta$ 时 $v=0(\varepsilon^n)$，其中 n 是任意一个大的正数，δ 是任意一个固定的小的正数. 不但如此，函数 $v_0^{(1)}$ 关于变量 x_1 的偏导数也是边界层函数.

为了进一步分析边界层的性质和估计余项，现对右端函数 h 作如下假定:

假定函数 $h(x,\ y)$在 Q 内关于变量 x 有连续偏导数并且 $h(x,\ y)$在点 $A(a,\ 0)$, $B(a,\ b)$等于零.

在此情况下可直接验证: $w_0(x,\ 0)=-e^x\varphi(a-x)$在 $0\leqslant x\leqslant a$ 内二次可微，并且$\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$(见(5.10)). 因此

$$\frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial x_1^2}=\frac{e^{a-x_1}}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{x_1}\frac{t}{(x_1-\xi)^{3/2}}e^{-\frac{t^2}{4(x_1-\xi)}}\times[\varphi'(\xi)-2\varphi'(\xi)+\varphi(\xi)]d\xi. \tag{5.12}$$

由极大值原理推得

$$\left|\frac{\partial^2 v_0^{(1)}}{\partial x_1^2}\right|\leqslant\max_{0<\xi<a}C(|\varphi''(\xi)|+2|\varphi'(\xi)|+|\varphi(\xi)|). \tag{5.13}$$

注 若 $\varphi'(0)\neq 0$，则 $v_0^{(1)}$关于 x 的二阶偏导数在点(0, 0)将有奇异性. 在证明边界层的渐近性质时将遇到困难. Eckhaus, DE Jager[22] 曾指出克服这一困难的方法.

令 $\tilde{v}_0^{(1)}=\psi\left(\frac{y}{\delta}\right)v_0^{(1)}$，这就是我们在 Γ_1 附近所要求的边界层函数.

类似地在边界 $\Gamma_2(0\leqslant x\leqslant a,\ y=b)$ 附近构造边界层函数

$$\tilde{v}_0^{(2)}=\psi\left(\frac{b-y}{\delta}\right)v_0^{(2)}\left(x_1,\ \frac{b-y}{\varepsilon}\right).$$

最后，我们在边界 $\Gamma_3(0\leqslant y\leqslant b, x=0)$ 附近构造函数 $v_0^{(3)}$. 为此引入伸长变换 $x=\varepsilon^2 z,\ z=x/\varepsilon^2$. 算子 L_ε 在 Γ_3 附近的第二次分解是:

$$\varepsilon^2 L_\varepsilon u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial u}{\partial z}-\varepsilon^2 u+\varepsilon^4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{5.14}$$

它的主要部分 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 仍和以前一样是关于变量 z 的常微分算子. 为了构造边界层校正项的一次近似，在(5.14)中可多取一项，即要求 $v_0^{(3)}$ 满足方程

$$Mv_0^{(3)}\equiv\frac{\partial^2 v_0^{(3)}}{\partial z^2}+\frac{\partial v_0^{(3)}}{\partial z}-\varepsilon^2 v_0^{(3)}=0. \tag{5.15}$$

$v_0^{(3)}$ 应满足的边界条件是:

$$v_0^{(3)}\big|_{z=0}=v_0^{(3)}\big|_{x=0}=-w_0(0,\ y)-\tilde{v}_0^{(1)}\left(0,\ \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$-v_0^{(2)}\left(0,\ \frac{b-y}{\varepsilon}\right)=\zeta(y). \tag{5.16}$$

方程(5.15)的特征方程有一个根是负的:

$$\lambda_1=\frac{-1-\sqrt{1+4\varepsilon^2}}{2}=-\lambda, \tag{5.17}$$

从而得到

$$v_0^{(3)}=\zeta(y)e^{-\frac{\lambda x}{\varepsilon^2}}, \tag{5.18}$$

$$\tilde{v}_0^{(3)}=\psi\left(\frac{x}{\sigma}\right)v_0^{(3)}. \tag{5.19}$$

显然 $\tilde{v}_0^{(3)}$ 具有边界层性质.

若右端函数 $h(x,\ y)$ 在 $\bar{Q}$ 内关于变量 y 有二阶导数，则 $w_0(0,\ y)$ 亦二次可微。又因为 $v_0^{(1)}$, $v_0^{(2)}$ 满足方程(5.7)，所以

$v_0^{(1)}$, $v_0^{(2)}$ 关于变量 y 有二阶导数，而 $\frac{\partial v_0^{(1)}}{\partial x}$, $\frac{\partial v_0^{(2)}}{\partial x}$ 是存在的．从而推得函数 $\tilde{v}_0^{(3)}$ 关于变量 y 亦二次可微．设

$$u_\varepsilon = w_0 + \tilde{v}_0^{(1)} + \tilde{v}_0^{(2)} + \tilde{v}_0^{(3)} + z, \tag{5.20}$$

则由(5.1)，(5.5)，(5.14)得到

$$\begin{aligned} L_\varepsilon z &= L_\varepsilon u_\varepsilon - L_\varepsilon w_0 - L_\varepsilon(\tilde{v}_0^{(1)} + \tilde{v}_0^{(2)}) - L_\varepsilon \tilde{v}_0^{(3)} \\ &= -\varepsilon^2 \Delta w_0 - \varepsilon^2 \frac{\partial^2(\tilde{v}_0^{(1)} + \tilde{v}_0^{(2)})}{\partial x^2} \\ &\quad - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}_0^{(3)}}{\partial y^2} + O(\varepsilon^n). \end{aligned} \tag{5.21}$$

在 $O(\varepsilon^n)$ 中包含有平滑函数 ψ 的导数．由(5.13)我们知道 $\frac{\partial^2(\tilde{v}_0^{(1)} + \tilde{v}_0^{(2)})}{\partial x^2} = O(1)$．对 $\tilde{v}_0^{(3)}$ 来说，由于在表达式(5.18)中含有 $\zeta(y)$，因此除去宽度为 $O(\varepsilon)$ 的点(0, 0)和点(0, b)的邻域 V_0, V_b 外，我们有 $\frac{\partial^2 \tilde{v}_0^{(3)}}{\partial y^2} = O(1)$．从而在 $Q - V_0 - V_b$ 内处处有

$$L_\varepsilon z = O(\varepsilon^2), \tag{5.22}$$

显然，

$$z|_\Gamma = 0. \tag{5.23}$$

我们现在来估计余项 z．构造辅助函数

$$B_1(x, y) = M_1 e^{-\frac{x}{M\varepsilon^2}} + \varepsilon^2(M_2 - M_3 y), \tag{5.24}$$

$$B_2(x, y) = M_1 e^{-\frac{y}{M\varepsilon}} + \varepsilon^2(M_2 - M_3 x), \tag{5.25}$$

其中 M, M_1, M_2, M_3 是常数．适当选取这些常数使得

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon(B_i \pm z) < 0, \\ &(B_i \pm z)|_\Gamma \geqslant 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

从而我们有

$$B_i \geqslant |z| \quad (i = 1, 2). \tag{5.27}$$

于是

$$|z| \leqslant \min(B_1,\ B_2). \tag{5.28}$$

因此在 $Q-V_0-V_b$ 内有

$$z = O(\varepsilon^2). \tag{5.29}$$

若摄动问题 A_ε 的参数充分光滑，可应用迭代过程求出 u_ε 的高次近似.

2) 一般的二阶椭圆型方程第一边值问题(1.16), (1.17):

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon L_2 u + L_1 u = h(x,\ y), \tag{1.16}$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma = 0, \tag{1.17}$$

其中

$$L_2 u \equiv a(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+ d(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,\ y)u, \tag{1.18}$$

$$L_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial x} - g(x,\ y)u,\ a(x,\ y) \geqslant \alpha^2 > 0,\ g(x,\ y) \geqslant \beta^2 > 0. \tag{1.19}$$

假定区域 Q 的边界是由 $y=0$, $y=b(b>0)$, Γ_- 和 Γ_+ 所组成，即边界 Γ 的上下两条边是由退化方程(1.22)的特征线所组成，并假定 $y=0$, $y=b$ 和 Γ_-, Γ_+ 的交角不等于 0 和 π.

和问题(5.1), (5.2)一样，可类似地构造这一问题的渐近解. 先作变量代换:

$$x' = \varphi(x,\ y),\ y' = y, \tag{5.30}$$

其中 $x'=0$ 是边界 Γ_- 的方程: $\varphi(x,\ y)=0$; $x'=a$ 是边界 Γ_+ 的方程: $\varphi(x,\ y)=a$. 假定 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \geqslant \gamma_0^2 > 0$. 在这变换下 (x, y) 平面上的区域 Q 变为 $(x',\ y')$ 平面上的矩形区域 Q' $(0 \leqslant x' \leqslant a,\ 0 \leqslant y' \leqslant b)$. 摄动方程(1.16)有以下形式

$$
\begin{aligned}
L'_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \Big[& \alpha(x', y') \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + 2\beta(x', y') \frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} \\
& + \gamma(x', y') \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \delta(x', y') \frac{\partial u}{\partial y'} \\
& + \omega(x', y') \frac{\partial u}{\partial x'} + f(x', y') u \Big] \\
& + \eta(x', y') \frac{\partial u}{\partial x'} - g(x', y') u = h(x', y'),
\end{aligned}
$$

$$
\eta = \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{5.31}
$$

边界条件(1.17)变为

$$
u_\varepsilon |_{\Gamma'} = 0, \tag{5.32}
$$

其中 Γ' 是矩形边界. 边值问题(5.31), (5.32)我们称为问题 A'_ε. 相应的退化问题(问题 A'_0):

$$
L'_0 w \equiv \eta(x', y') \frac{\partial w}{\partial x'} - g(x', y') w = h(x', y'), \tag{5.33}
$$

$$
w |_{x'=a} = 0. \tag{5.34}
$$

当摄动问题 A'_ε 退化为问题 A'_0 时在 $x'=0$, $y'=0$, $y'=b$ 三条边上各失去一个边界条件. 在这些边界附近和以前一样可构造边界层函数. 例如在 $y'=0$ 附近, 先将算子 L'_ε 中的系数在 $y'=0$ 附近按 Taylor 公式展开:

$$
\begin{aligned}
& \alpha'(x', y') = \alpha(x') + \alpha_1(x') y' + \cdots, \\
& \eta(x', y') = \eta(x') + \eta_1(x') y' + \cdots, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\
& g(x', y') = g(x') + g_1(x') y' + \cdots.
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

再作伸长变换: $y' = \varepsilon t$, $t = y'/\varepsilon$, 则得到 L'_ε 的第二次分解:

$$
L'_\varepsilon u \equiv M_0 u + \varepsilon R_1 u + \cdots. \tag{5.36}
$$

关于边界层校正项中一次近似 v_0 我们得到方程

$$M_0 v_0 \equiv \gamma(x') \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + \eta(x') \frac{\partial v_0}{\partial x'} - g(x') v_0 = 0. \quad (5.37)$$

要求 v_0 与退化问题(5.33)，(5.34)的解 w_0 之和满足边界条件

$$(v_0 + w_0)|_{y'=0} = 0,$$
$$(v_0 + w_0)|_{x'=a} = 0.$$

如此得到 v_0 应满足的边界条件是：

$$v_0|_{t=0} = v_0|_{y'=0} = -w_0(x', 0), \quad (5.38)$$

$$v_0|_{x'=a} = 0. \quad (5.39)$$

方程(5.37)是一抛物型方程，我们在区域($x'<a$, $y'>0$)内解(5.37)，(5.38)，(5.39)即得到所要求的一次近似 v_0. 它有类似于(5.11)的表达式，因而是边界层类型函数. 和(5.11)一样，它是由抛物型方程边值问题所确定的，称为**抛物边界层**. 类似地，在边界 $y'=b$ 附近也是构造的抛物边界层. 而在边界 $x'=0$ 附近构造的边界层函数仍由常微分方程边值问题所确定. 这样，我们就构造了问题 A_ε 解 u_ε 的渐近表示：

$$u_\varepsilon = w_0 + \tilde{v}_0^{(1)} + \tilde{v}_0^{(2)} + \tilde{v}_0^{(3)} + z, \quad (5.40)$$

其中 z 是余项，可以证明

$$z = O(\varepsilon) \quad (5.41)$$

这一估计式比估计式(5.29)低一个数量级，这是因为在(5.31)中含有关于变量 y' 的一阶偏导数.

如摄动问题 A_ε 的参数充分光滑，通过基本迭代过程可以构造高阶渐近式.

对于这样一类摄动问题，即在失去边界条件或初始条件的那一部分边界附近算子 L_ε 的第二次分解中的主要部分 M_0 是一偏微分算子时，退化的正则性，即意味着方程 $M_0 v_0 = 0$ 边值问题的解应该是边界层类型的解，因此问题(5.1)，(5.2)

和(1.16)，(1.17)都是正则退化的.

关于问题(1.16)，(1.17)抛物边界层渐近性质的进一步讨论读者可参看 Eckhaus, DE Jager的工作[22].

研究抛物边界层的工作还有[30]，[31]，[32]，[33]等.

5-2 椭圆边界层 在正方形 $Q(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant y\leqslant l)$ 内讨论摄动问题 A_ε:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,\ y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + b(x, y) u = h(x, y), \tag{5.42}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{5.43}$$

假定，系数 $a(x,\ y)$，$b(x,\ y)$和右端函数 $h(x,\ y)$充分光滑，并且

$$a(x,\ y) \geqslant \alpha^2 > 0. \tag{5.44}$$

相应的退化问题(问题 A_0):

$$L_0 w_0 \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,\ y) \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] + b(x,\ y) w_0 = h(x,\ y), \tag{5.45}$$

$$w_0|_{y=0} = w_0|_{y=l} = 0. \tag{5.46}$$

假定问题 A_0 是可解的，w_0 是它的解. 因此当 $\varepsilon=0$ 时问题 A_ε 在边界 $\Gamma_1(x=0,\ 0\leqslant y\leqslant l)$ 和 $\Gamma_2(x=l,\ 0\leqslant y\leqslant l)$ 上各失去一个边界条件.

在 Γ_1 附近构造边界层函数 $v_0^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon},\ y\right)$，它是下面椭圆型方程边值问题的解:

$$\frac{\partial^2 v_0^{(0)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(0,\ y) \frac{\partial v_0^{(0)}}{\partial y} \right] + b(0,\ y) v_0^{(0)} = 0$$

$$\left(\begin{matrix} 0<y<l \\ 0<\xi<+\infty \end{matrix} \right), \tag{5.47}$$

$$v_0^{(0)}\big|_{\xi=0}=-w_0(0,\ y),\ \lim_{\xi\to+\infty} v_0^{(0)}=0,$$
$$v_0^{(0)}\big|_{y=0}=v_0^{(0)}\big|_{y=l}=0, \tag{5.48}$$

其中 $x=\varepsilon\xi$, $\xi=x/\varepsilon$.

问题(5.47), (5.48)可用 Fourier方法解之. 于是得到下面的特征值问题:

$$[a(0,\ y)\varphi'(y)]'+b(0,\ y)\varphi(y)=-\lambda\varphi(y), \tag{5.49}$$

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0. \tag{5.50}$$

设

$$b(0,\ y)\leqslant 0,\ y\in[0,\ l]. \tag{5.51}$$

那末所有特征值 $\lambda_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$都是正的. 假定 $\varphi_k(k=1,\ 2,\ \cdots)$是与之相应的标准正交特征函数系. 那末问题(5.47), (5.48)的解可表示为

$$v_0^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon},\ y\right)=v_0^{(0)}(\xi,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\sqrt{\lambda_k}\xi}\varphi_k(y)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\frac{\sqrt{\lambda_k}x}{\varepsilon}}\varphi_k(y), \tag{5.52}$$

其中 A_k 是函数 $w_0(0,\ y)$按特征函数系 $\{\varphi_k\}$ 展开的 Fourier 系数. 显然, $v_0^{(0)}$ 具有边界层性质, 它是由椭圆型方程边值问题确定的, 故称椭圆边界层. 类似地, 在 Γ_2 附近可以构造边界层函数 $v_0^{(l)}$.

5-3 双曲边界层 在 $G(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T)$内讨论双曲型方程混合问题(问题 A_ε):

$$L_\varepsilon u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=h(x,\ t)\quad(0<x<l,\ 0<t\leqslant T), \tag{5.53}$$

$$u\big|_{t=0}=0,\ u_t\big|_{t=0}=0, \tag{5.54}$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0. \tag{5.55}$$

相应的退化问题(问题 A_0):

$$L_0w_0\equiv\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=h(x,\ t),\tag{5.56}$$

$$w_0|_{t=0}=0,\ (w_0)_t|_{t=0}=0.\tag{5.57}$$

假定 $w_0(0,\ 0)=0$.

在边界 $\Gamma_1(x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ 和 $\Gamma_2(x=l,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ 上各失去一个边界条件. 在 Γ_1 附近作伸长变换 $x=\varepsilon\xi$, $\xi=x/\varepsilon$, 则得到

$$M_0v_0^{(0)}\equiv\frac{\partial^2 v_0^{(0)}}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 v_0^{(0)}}{\partial x^2}=0.\tag{5.58}$$

要求 $v_0^{(0)}$ 满足边界条件:

$$\begin{aligned}&v_0^{(0)}|_{\xi=0}=v_0^{(0)}|_{x=0}=-w_0(0,\ t),\\&v_0^{(0)}|_{t=0}=0,\ (v_0^{(0)})_t|_{t=0}=0.\end{aligned}\tag{5.59}$$

显然,

$$v_0^{(0)}\left(\frac{x}{\varepsilon},\ t\right)\begin{cases}-w_0\left(0,\ t-\dfrac{x}{\varepsilon}\right) & (t>x/\varepsilon),\\ 0, & (t<x/\varepsilon).\end{cases}\tag{5.60}$$

它是由双曲型方程边值问题确定的, 故称**双曲边界层**. 对此有兴趣的读者可参看 Треногин[34], 他曾研究过具有双曲边界层的拟线性双曲型方程混合问题.

5-4 内部边界层 边界层现象不只是产生在所讨论区域的边界附近, 而且可能产生在区域内部. 例如退化问题 A_0 的解沿一流形 R 有间断或者它的导数有间断, 而摄动问题 A_ε 的解是光滑的. 现举一例来阐明这一现象. 设在 $(x,\ y)$ 平面区域 $Q+\Gamma$ 内讨论摄动问题 A_ε:

$$L_\varepsilon u\equiv\varepsilon^2\Delta u-u=h(x,\ y),\tag{5.61}$$

$$u|_\Gamma=0.\tag{5.62}$$

退化问题 A_0: 解方程

$$L_0 w_0 \equiv -w_0 = h(x, y), \tag{5.63}$$

即 $w_0(x, y) = -h(x, y)$.

假定函数$h(x, y)$是分段光滑函数，沿直线 $y=0$ 上的线段 $\overline{CD}$ 有第一类间断点. 为简单起见，我们认为线段 $\overline{CD}$ 完全在区域 Q 内.

摄动问题 A_ε 是椭圆型方程第一边值问题，它的解 u_ε 在 $\bar{Q}$ 内是一连续可微函数. 因此 $u_\varepsilon - w_0$ 连同其一阶导数在 $\overline{CD}$ 有第一类间断. 在构造 u_ε 的渐近式时除 w_0 外，还必须加上一项 $\eta_\varepsilon(x, y)$使得 $w_0+\eta_\varepsilon$ 及其一阶偏导数是连续的. 此外，当 $\varepsilon=0$ 时退化问题的解 $w_0=-h(x, y)$一般不满足边界条件(5.62)，因此还必须沿边界 Γ 构造边界层函数 v_ε 使得 $w_0+\eta_\varepsilon+v_\varepsilon$ 满足失去的边界条件. 构造 v_ε 的过程和以前一样，不再详细论述. 现在来构造函数 $\eta_\varepsilon(x, y)$. 假定它有以下形式

$$\eta_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \varphi(x) e^{-y/\varepsilon}, & y>0, \\ \psi(x) e^{y/\varepsilon}, & y<0, \end{cases} \tag{5.64}$$

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x)$是待定函数. 记

$$[F] = F(x, +0) - F(x, -0). \tag{5.65}$$

根据对函数 $w_0+\eta_\varepsilon$ 及其一阶导数的连续性要求，我们有

$$[w_0+\eta_\varepsilon] = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}(w_0+\eta_\varepsilon)\right] = 0.$$

由此推得

$$-[w_0] = \varphi(x) - \psi(x),$$

$$-\left[\frac{\partial w_0}{\partial y}\right] = -\frac{1}{\varepsilon}[\varphi(x)+\psi(x)].$$

于是，

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\left[w_0 - \varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial y}\right], \quad \psi(x) = \frac{1}{2}\left[w_0 + \varepsilon\cdot\frac{\partial w_0}{\partial y}\right]. \tag{5.66}$$

如此我们得到摄动问题 A_ε 解 u_ε 的渐近式：

$$u_\varepsilon = w_0 + \eta_\varepsilon + v_\varepsilon + z, \tag{5.67}$$

其中 w_0 是退化问题的解，η_ε 是沿线段 $\overline{CD}$ 构造的边界层函数，称为内部边界层，v_ε 是沿边界 Γ 构造的边界层函数，$L_\varepsilon v_\varepsilon = O(\varepsilon^2)$，我们要求它满足边界条件：

$$(w_0 + \eta_\varepsilon + v_\varepsilon)|_\Gamma = 0,$$

即

$$v_\varepsilon|_\Gamma = -(w_0 + \eta_\varepsilon)|_\Gamma, \tag{5.68}$$

z 是余项. 设

$$\widetilde{W} = w_0 + \eta_\varepsilon + v_\varepsilon, \tag{5.69}$$

则

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \widetilde{W} &= L_\varepsilon(w_0 + \eta_\varepsilon + v_\varepsilon) = \{L_\varepsilon w_0\} + \{L_\varepsilon \eta_\varepsilon\} + L_\varepsilon v_\varepsilon \\ &= \varepsilon^2\{\Delta w_0\} - w_0 + \varepsilon^2 \left\{\frac{\partial^2 \eta_\varepsilon}{\partial y^2}\right\} - \eta_\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \eta_\varepsilon}{\partial x^2} \\ &\quad + L_\varepsilon v_\varepsilon = h(x, y) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{5.70}$$

其中{ }表示相应表达式在古典意义下的值(即未考虑到 $\overline{CD}$ 上的 δ 函数). 由(5.70)，余项

$$z = u_\varepsilon - (w_0 + \eta_\varepsilon + v_\varepsilon) = u_\varepsilon - \widetilde{W}$$

满足

$$L_\varepsilon z = O(\varepsilon^2). \tag{5.71}$$

在边界 Γ 上有

$$z|_\Gamma = 0. \tag{5.72}$$

可以证明，有如下的估计式成立：

$$\|z\| + \varepsilon\|D^1 z\| + \varepsilon^2\|D^2 z\| = O(\varepsilon^2), \tag{5.73}$$

其中 $\|\quad\| = \|\quad\|_{L_2(Q)}$.

利用迭代过程可以得到高次近似.

Исакова[35] 曾对抛物型方程研究过内部边界层的构造，它是由抛物型方程确定的，称为内部抛物边界层.

这一章我们在退化问题可解的假定下讨论了椭圆型方程和单一特征线偏微分方程的奇异摄动问题，介绍了

Люстерник-Вишик 方法的基本内容. 实际上在他们的工作公开发表以后偏微分方程奇异摄动问题的许多方面出现了大量的研究工作. 在椭圆型方程方面有 Knowles, Messick[30], Eckhaus, de Jager[22], Friedman[36], Иванова[37], Федотов[38], Bui An Ton[23], Бутузов[39], Fife[40], Besjes[41], Van Harten[42], Howes[43], 林宗池[44], [93] 等工作, 林宗池讨论的是椭圆型算子和区域边界同时摄动的问题. 1971 年 Comstock[45] 利用"两变量展开法"构造了四阶椭圆型方程的奇异摄动问题的渐近解, 江福汝等利用此方法研究了高阶椭圆型方程的一般边值问题[46] 和薄板弯曲问题[47]. 两变量展开法原来用于常微分方程摄动问题[11], [48], 它不同于 Люстерник-Вишик 方法, 用它构造边界层函数具有一定的优点, 请读者参看上面提到的研究工作.

关于椭圆型方程的特征边界问题除 Eckhaus, de Jager[22], Knowles, Messik[30] 外, 还有 Frankena[24], Леликова[49] 等工作.

此外, Джавадов[50], Су Юй-чэн[33] 研究了椭圆型方程退化为抛物型方程的问题, Джавадов 研究了椭圆型方程退化为双曲型方程的问题[51].

关于抛物型方程奇异摄动问题的研究工作, 例如有 Треногин[52], Zláma[53], [54], Holland[55], Bobisad[57], Besjes[56] 等.

关于双曲型方程奇异摄动问题的研究工作, 例如有苏煜城[33], [58], [59], Треногин[34], Джавадов[60], [61], Zláma[62], Comstork[63], Geel, de Jager[64], Genet, Madaune[65]等.

本书篇幅有限, 关于双曲型方程和抛物型方程奇异摄动问题不予介绍, 有兴趣的读者请参看前面所提到的有关文献.

第 3 章

线代数中的摄动问题

§1 引　　言

在前面两章，我们讨论了常微分方程和偏微分方程奇异摄动问题渐近解的构造，并对渐近式的余项作了估计．这些问题的特点是，摄动方程的阶数高于退化方程的阶数，当 $\varepsilon=0$ 时摄动问题的定解条件将减少，在失去定解条件的那一部分边界附近，摄动问题的解 u_ε 与退化问题解 w_0 的差在正则退化的情形下将是一个边界层函数，因此摄动问题的解 u_ε 当 $\varepsilon\to 0$ 时不能一致逼近于退化问题的解 w_0．函数 u_ε，作为 ε 的函数，在 $\varepsilon=0$ 具有奇异性，$\varepsilon=0$ 是它的奇点．如果讨论的摄动方程与退化方程同阶，但方程类型不一样，也会有同样现象．为了消除这一奇异性，Люстерник 和 Вишик 在失去边界条件的那一部分边界附近引进局部坐标和正则化伸长变换，对原来的摄动算子作了第二次分解以构造边界层校正项．但在数学物理中还存在另一类奇异摄动问题，它们的退化问题位于谱上，即 $\lambda=0$ 是退化算子的特征值，此时退化问题非唯一可解，因而摄动问题的解 u_ε，作为 ε 的函数，又增加了一种类型的奇点．Люстерник 和 Вишик 称这类奇点为**代数奇点**，前一类奇点为**分析奇点**．因此当退化问题位于谱上时，相应的奇异摄动问题的解 u_ε 关于这两类奇点是兼而有之．为了构造它的渐近解，除前面两章所述的方法外，还需介绍新的方法．

在线代数的摄动问题中我们将会遇到上面所述的代数奇点. 设 $A_0, A_1, A_2, \cdots$ 是空间 X 中的线性算子,

$$A_\varepsilon = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots \tag{1.1}$$

是摄动算子, A_0 是其主要部分, $\varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots$ 是它的摄动部分. 算子 A_ε 的摄动问题和非摄动问题(极限问题)提法如下:

摄动问题: 解方程

$$A_\varepsilon x_\varepsilon = h. \tag{1.2}$$

相应的非摄动问题($\varepsilon=0$): 解方程

$$A_0 x_0 = h. \tag{1.3}$$

设方程(1.2)的解有如下形式的展开式:

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots. \tag{1.4}$$

代入方程(1.2), 合并 ε 的同幂项, 比较方程两端的系数, 我们得到确定 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ 的方程组

$$\begin{aligned} &A_0 x_0 = h, \\ &A_0 x_1 = -A_1 x_0, \\ &A_0 x_2 = -A_1 x_1 - A_2 x_0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中第一个方程就是非摄动方程(1.3). 摄动问题解 x_ε 的性质将取决于非摄动问题(1.3)是否位于谱上, 即 $\lambda=0$ 是否是算子 A_0 的特征值. 如果 $\lambda=0$ 不是它的特征值, 则逆算子 A_0^{-1} 存在, 方程(1.3)唯一可解, 因而方程组(1.5)中每一个方程都唯一可解, 迭代过程可完全实现, 由此定出所有系数 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$. 最后只需研究级数(1.3)的收敛性或估计其 n 项和的余项即可.

当 $\lambda=0$ 是算子 A_0 的特征值时, 方程(1.3)一般不可解. 若摄动问题的解 x_ε 存在, 则 x_ε 作为 ε 的函数, 在 $\varepsilon=0$ 将有

奇性. 例如, 在 n 维空间, 算子 A_0 是 n 阶矩阵, 并且 $\det A_0=0$ 时, 即存在这样的奇性, $\varepsilon=0$ 是 x_ε 的极点.

解代数方程时也会遇到这样的问题. 假定我们解代数方程

$$P_\varepsilon(x_\varepsilon)=0, \tag{1.6}$$

其中

$$P_\varepsilon(x)=P_0(x)+\varepsilon P_1(x)+\cdots \tag{1.7}$$

关于 ε 是多项式, 所有 $P_i(x)$ 都是关于 x 的多项式. 当 $\varepsilon=0$ 时我们有极限方程

$$P_0(x)=0. \tag{1.8}$$

若方程(1.8)只有单根 x_0, 则接近于 x_0 的方程(1.6)的根 x_ε 是 ε 的解析函数.

若方程(1.8)有重根 x_0, 则方程(1.6)的根 x_ε, 作为 ε 的函数, 在 $\varepsilon=0$ 具有分支点. 例如,

$$P_\varepsilon(x)=x^3-\varepsilon x^2-\varepsilon x+2\varepsilon^2=0. \tag{1.9}$$

其极限方程(非摄动方程)是:

$$P_0(x)=x^3=0. \tag{1.10}$$

因此极限方程的根 $x_0=0$ 是三重根.

作代换

$$x=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\tau, \tag{1.11}$$

方程(1.9)可改写为

$$P_\varepsilon(x)=\varepsilon^{\frac{3}{2}}Q_\varepsilon(\tau)=\varepsilon^{\frac{3}{2}}[(\tau^3-\tau)+\varepsilon^{\frac{1}{2}}(2-\tau)]=0. \tag{1.12}$$

此时极限方程

$$Q_0(\tau)=\tau^3-\tau=\tau(\tau^2-1)=0 \tag{1.13}$$

有两个非零单根 $\tau_0=1$, $\tau_0=-1$ 和一个零根.

设方程

$$Q_\varepsilon(\tau)=\tau^3-\tau+\varepsilon^{\frac{1}{2}}(2-\tau^2)=0 \tag{1.14}$$

的根有以下形式:

$$\tau_\varepsilon=\tau_0+\varepsilon^{\frac{1}{2}}\tau_1+\varepsilon\tau_2+\cdots=\tau_0+\sum_{i=1}\varepsilon^{i/2}\tau_i. \tag{1.15}$$

代入方程(1.14),合并 ε 的同幂项并令其系数为零,则得到确定 τ_0, τ_1, τ_2, $\cdots$ 的方程:

$$\begin{aligned}&\tau_0^3-\tau_0=0,\\&(3\tau_0^2-1)\tau_1+2-\tau_0^2=0,\\&(3\tau_0^2-1)\tau_2+\tau_0\tau_1(3\tau_1-2)-\tau_1=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned} \tag{1.16}$$

依次解之,则得到

$$\begin{cases}\tau_0=0,\\\tau_1=2,\\\tau_2=-4,\\\cdots\cdots\cdots.\end{cases}\quad\begin{cases}\tau_0=1,\\\tau_1=-1/2,\\\tau_2=-3/4,\\\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{cases}\quad\begin{cases}\tau_0=-1,\\\tau_1=-1/2,\\\tau_2=1,\\\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{cases} \tag{1.17}$$

因此,方程(1.14)有如下的级数解:

$$\begin{aligned}&\tau_\varepsilon^{(1)}=2\varepsilon^{1/2}-4\varepsilon+\cdots,\\&\tau_\varepsilon^{(2)}=1-\frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}-\frac{3}{4}\varepsilon+\cdots,\\&\tau_\varepsilon^{(3)}=-1-\frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}+\varepsilon+\cdots.\end{aligned} \tag{1.18}$$

于是方程(1.12)的级数解为:

$$\begin{aligned}&x_\varepsilon^{(1)}=2\varepsilon-4\varepsilon^{\frac{3}{2}}+\cdots,\\&x_\varepsilon^{(2)}=\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{3}{4}\varepsilon^{\frac{3}{2}}+\cdots,\\&x_\varepsilon^{(3)}=-\varepsilon^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\varepsilon+\varepsilon^{\frac{3}{2}}+\cdots.\end{aligned} \tag{1.19}$$

在方程(1.6)中如果对未知量作代换 $x=\varepsilon\bar{\tau}$,则

$$P_\varepsilon(x)=P_\varepsilon(\varepsilon\bar{\tau})=\varepsilon^2Q_\varepsilon(\bar{\tau})=\varepsilon^2[-\bar{\tau}+2+\varepsilon(\bar{\tau}^3-\bar{\tau}^2)]=0.$$

方程

$$Q_\varepsilon(\bar{\tau})=-\bar{\tau}+2+\varepsilon(\bar{\tau}^3-\bar{\tau}^2)=0 \tag{1.20}$$

的极限方程 $Q_0(\bar{\tau})=-\bar{\tau}+2=0$ 有一单根 $\bar{\tau}_0=2$. 设方程(1.20)与此单根相应的解为:

$$\bar{\tau}_\varepsilon=\bar{\tau}_0+\varepsilon\bar{\tau}_1+\cdots=\bar{\tau}_0+\sum_{i=1}\varepsilon^i\bar{\tau}_i. \tag{1.21}$$

代入(1.20), 令同幂项系数为零, 则得到确定 $\bar{\tau}_0$, $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$, …的方程:

$$\begin{aligned}&-\bar{\tau}_0+2=0,\\&\bar{\tau}_1-\bar{\tau}_0^3+\bar{\tau}_0^2=0,\\&\bar{\tau}_2-3\bar{\tau}_0^2\bar{\tau}_1+2\bar{\tau}_0\bar{\tau}_1=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\end{aligned}$$

解之, 我们有

$$\bar{\tau}_0=2,\ \bar{\tau}_1=4,\ \bar{\tau}_2=32,\ \cdots.$$

因此

$$\bar{\tau}_\varepsilon=2+4\varepsilon+32\varepsilon^2+\cdots, \tag{1.22}$$

$$x_\varepsilon=2\varepsilon+4\varepsilon^2+32\varepsilon^3+\cdots. \tag{1.23}$$

在以上讨论中我们对方程(1.9)的未知量作了两种变量代换 $x=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\tau$ 和 $x=\varepsilon\bar{\tau}$, 它们有助于消除方程(1.9)的解 x_ε 在 $\varepsilon=0$ 的奇异性, 使变换后方程的极限方程具有单根, 自然称它为**正则化变换**. 对于一般方程(1.2), 可作变量代换:

$$y_\varepsilon=\alpha_\varepsilon x_\varepsilon, \tag{1.24}$$

其中 α_ε 是空间 X 中依赖于 ε 的算子并有逆算子: $x_\varepsilon=\alpha_\varepsilon^{-1}y_\varepsilon$. 在此情况下我们得到一个与(1.2)等价的方程

$$B_\varepsilon y_\varepsilon=h,\ B_\varepsilon=A_\varepsilon\alpha_\varepsilon^{-1}, \tag{1.25}$$

并且算子 B_ε 有以下分解:

$$B_\varepsilon = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \cdots. \qquad (1.26)$$

如果方程(1.25)的解 y_ε，作为 ε 的函数，在 $\varepsilon=0$ 已无奇异性，我们称变换(1.24)为**正则化变换**.

在上例中我们所作的两种变换表明，方程(1.9)的根 X_ε 可以按 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ 的幂展开，也可按 ε 幂展开. 实际上这类方程的各个根关于小参数 ε 的阶数不一定相同. 例如方程 $P_\varepsilon(x)=x^3+\varepsilon=0$ 三个根的阶数都为 $\varepsilon^{1/3}$，方程 $P_\varepsilon(x)=x^3-\varepsilon x(x+1)+\varepsilon^2=0$ 有三个根 $x_1=\sqrt{\varepsilon}$，$x_2=-\sqrt{\varepsilon}$，$x_3=\varepsilon$，两个根的阶数为 $\varepsilon^{1/2}$，一个根为 ε，而方程 $P_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon)(x-2\varepsilon)(x-3\varepsilon)=0$ 的三个根的阶数都是 ε.

当我们考虑摄动矩阵 $A_\varepsilon=A_0+\varepsilon A_1$ 的特征值 λ_ε 就要研究特征方程 $|A_\varepsilon-\lambda_\varepsilon I|=0$ 的求根问题，这是关于 λ_ε 的代数方程.

由于线代数方程组摄动问题与一些微分方程摄动问题和奇异摄动问题之间的相似性，我们先讨论如何构造线代数方程组摄动问题解的渐近式，然后再将这些结果推广到偏微分方程摄动问题和奇异摄动问题上来.

在这一章我们还讨论了矩阵特征值和特征向量的摄动问题，在第六章将把这些结果推广到线性微分算子特征值和特征函数的摄动问题.

§2 Jordan 定理

2-1 伴随特征向量和 Jordan 链 设 E 和 G 是 m 维线性空间. 我们用符号 $(E\to G)$ 表示从 E 到 G 的线性算子的集合. 设 $u_0\in E$，$t:(-\infty<t<+\infty)$，称形如

$$u = tu_0, \quad -\infty < t < +\infty \tag{2.1}$$

的向量集合为**直线**．设 $A_0 \in (E \to E)$，在 E 内我们用 m 阶矩阵 A_0 来表示它．

现讨论算子 A_0 的特征值问题：

$$A_0 x = \lambda x, \tag{2.2}$$

相应的特征方程是：

$$P_0(\lambda) = |A_0 - \lambda I| = 0, \tag{2.3}$$

其中 I 是单位算子．设 $\lambda = \lambda_0$ 是特征方程(2.3)的根，则 $\lambda = \lambda_0$ 是算子 A_0 的特征值．不失去一般性，可以认为 $\lambda_0 = 0$．否则以算子 $A_{\lambda_0} = A_0 - \lambda_0 I$ 代替 A_0，即可归结为所要的情形．下面谈到的特征向量和伴随特征向量如无预先说明，都是和 $\lambda_0 = 0$ 相对应的．

设 u_0 是与 $\lambda_0 = 0$ 相对应的算子 A_0 的特征向量：

$$A_0 u_0 = 0. \tag{2.4}$$

若方程

$$\left.\begin{array}{l} A_0 u_1 = u_0 \\ A_0 u_2 = u_1 \\ A_0 u_3 = u_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_0 u_{k-1} = u_{k-2} \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

有非零解 $u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}$，而方程

$$A_0 x = u_{k-1} \tag{2.6}$$

不可解，则说向量 $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$ 形成长度为 k 的 Jordan 链．向量 $u_i (i \geqslant 1)$ 称为与 u_0 相对应的 i 阶伴随特征向量．

若 A_0 是对称矩阵，则 Jordan 链的长度 $k=1$．

注 1 方程(2.5)的解不是唯一的．事实上，若 x_0 是方程

$$A_0x=y \tag{2.7}$$

的解，则此方程有如下形式的通解：

$$x=x_0+u, \tag{2.8}$$

其中 u 是 A_0 的任意一个特征向量：$A_0u=0$. 因此与已知特征向量 u_0 相应的 Jordan 链不是唯一的.

注 2 由方程(2.4)和(2.5)得到

$$A_0u_0=0,\ A_0^2u_1=0,\ A_0^3u_2=0,\ A_0^ku_{k-1}=0.$$

因此

$$A_0^ku_i=0 \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1). \tag{2.9}$$

2-2 Jordan 定理 现考虑一般情形. 设与 $\lambda_0=0$ 相对应的特征向量有 r 个：$u_{10},\ u_{20},\ \cdots,\ u_{r0}$:

$$A_0u_{i0}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r). \tag{2.10}$$

假定对应于每一个 u_{i0} 的 Jordan 链的长度为 n_i，即方程

$$\left.\begin{aligned} &A_0u_{i1}=u_{i0},\\ &A_0u_{i2}=u_{i1},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ &A_0u_{in_i-1}=u_{in_i-2} \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

有解 $u_{i1},\ u_{i2},\ \cdots,\ u_{in_i-1}$，而方程

$$A_0u_{in_i}=u_{in_i-1} \tag{2.12}$$

不可解. 特征向量 u_{i0} 和伴随特征向量 $u_{i1},\ \cdots,\ u_{in_i-1}$ 形成长度为 n_i 的 Jordan 链.

所有特征向量 u_{i0} 和伴随特征向量 $u_{ij}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n_i-1)$ 组成一个线性生成系 S, S 是一不变子空间.

对应于矩阵 A_0 所有其余特征值的特征向量和伴随特征向量组成线性生成系 $\bar{S}$, $\bar{S}$ 也是不变子空间. 如此整个空间 E 可展为不变子空间 S 和 $\bar{S}$ 的直接和：

$$E=S+\bar{S}. \tag{2.13}$$

现将 Jordan 定理叙述如下：在 s 维不变子空间 S 中可以取特征向量 u_{10}, u_{20}, $\cdots$, u_{r0}($r \leqslant s$)以及与之相应的 Jordan 链[对应于每一个 u_{i0} 有一个长度为 n_i 的 Jordan 链$\{u_{ij}\}$ ($j=0, 1, \cdots, n_i-1$)]作为基底. 整个空间 E 可展为与矩阵 A_0 特征值相对应的不变子空间 S 和 $\bar{S}$ 的直接和:

$$E=S+\bar{S}.$$

这一定理的证明在一般线代数书中都能找到.

设 E_0 是由$\{u_{i0}\}$ ($i=1, \cdots, r$) 所组成的线性生成系; $\bar{E}_0$ 是由$\{u_{ij}\}$ ($j>0$)所组成的线性生成系; E_1 是由最高阶伴随特征向量$\{u_{i,n_i-1}\}$ ($i=1, \cdots, r$)组成的线性生成系; $\bar{E}_1$ 是由$\{u_{ij}\}$ ($0 \leqslant j < n_i-1$)所组成的线性生成系. 这些线性生成系有如下关系:

$$E=\bar{S}+S=\bar{S}+E_0+\bar{E}_0=\bar{S}+E_1+\bar{E}_1. \qquad (2.14)$$

算子 A_0 在 $\bar{S}$ 内有逆算子 A_0^{-1}. 此外由(2.11),

$$A_0 u_{ij}=u_{ij-1} \quad (j>0).$$

所以算子 A_0 将 $\bar{E}_0$ 的每个元素 u_{ij} ($j>0$) 变为 $\bar{E}_1$ 的元素. 再由(2.10), 我们有

$$A_0 E_0=0. \qquad (2.15)$$

因此算子 A_0 将 E_0 的正交补 $\bar{S}+\bar{E}_0$ 变为 E_1 的正交补 $\bar{S}+\bar{E}_1$.

设算子 $B=A_0^{-1}$, 则 B 将 $\bar{S}+\bar{E}_1$ 映射为 $\bar{S}+\bar{E}_0$. 在 S 内若 Jordan 基底固定, 则算子 B 亦固定. 它将基向量 u_{ij-1} ($1 \leqslant j \leqslant n_i-1$)变换为基向量 u_{ij}:

$$u_{ij}=Bu_{ij-1}. \qquad (2.16)$$

注 1 在直接和(2.14)中, 对于 Hermitian 矩阵来说我们有 $S=E_0=E_1$, $\bar{E}_0=\bar{E}_1=0$.

注 2 在直接和(2.14)中 E_0 是唯一确定的，而 $\bar{E}_0$, E_1, $\bar{E}_1$ 根据(2.7)，(2.8)可知不是唯一确定的. 但一当 Jordan 基底定了以后，$\bar{E}_0$, E_1, $\bar{E}_1$ 亦定了下来.

§3 关于线代数方程组的一些定理

在以后讨论中我们需用到一般线代数方程组的理论，现将一些重要定理列写于下，并对最后一个定理给予证明. 由于是一般性讨论，我们假定所讨论的矩阵和向量都是复矩阵和复向量.

设给定方程组

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{3.1}$$

和共轭方程组

$$\sum_{j=1}^{m} \bar{a}_{ji}y_j = c_i \quad (i=1, 2, \cdots, m), \tag{3.2}$$

其中 $\bar{a}_{ji}$ 是 a_{ij} 的共轭复数. 现将方程组(3.1)和(3.2)分别写为向量形式:

$$Ax = b, \tag{3.3}$$

$$A^*y = c, \tag{3.4}$$

其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$, $b=(b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$, $c=(c_1, c_2, \cdots, c_m)^T$, $A=(a_{ij})_{m\times m}$, $A^*=(\bar{a}_{ji})_{m\times m}$.

在线代数里我们知道，矩阵 A 与共轭矩阵 A^* 有相同的秩.

关于方程组(3.3)和(3.4)有以下几个定理:

定理 1 若方程组(3.3)的行列式异于零，则方程组(3.3)及其共轭方程组(3.4)对任意自由项 b 和 c 都是唯一可

解的. 在此情况下齐次方程组只有零解.

定理 2 若方程组(3.3)的行列式 $\det|A|=0$, 则齐次方程组 $Ax=0$, $A^*y=0$ 各有 $p=n-r$ 个线性无关非零解, 其中 r 是矩阵 A 的秩.

定理 3 非齐次方程组(3.3)有解的充要条件是, 矩阵 A 与其增广矩阵 $[A, b]$ 有相同的秩.

这些定理是线代数中所熟知的事实, 在一般线代数书中都可找到它们的证明.

下面一个定理是定理 3 的等价形式, 在以后讨论中要经常用到它.

定理 4 非齐次方程组(3.3)可解的充要条件是, 方程组(3.3)的自由项 b 应与共轭齐次方程组 $A^*y=0$ 的一切解正交.

现给出这一定理的证明. 若向量 x 和 y 满足下列等式

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{m} x_k \bar{y}_k=0,$$

则称向量 x 和 y 是正交的.

设 $\boldsymbol{a}_k$ 是由矩阵 A 第 k 列元素所组成的列向量:

$$\boldsymbol{a}_k=\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \quad k=1, 2, \cdots, m. \tag{3.5}$$

我们可改写方程组(3.3)为以下形式:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \boldsymbol{a}_j=b. \tag{3.6}$$

这一形式表明, 方程组(3.3)可解的充要条件是, 向量 b 应是向量 $\boldsymbol{a}_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 的线性组合. 换句话说, 向量 b 应属于由向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_m$ 所生成的子空间内. 设 $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots,$

$y_m)^T$是与所有 $a_k(k=1, 2, \cdots, m)$正交的任意一个向量. 为了使 b 属于上述子空间,当且仅当 b 与这样的 y 正交,即

$$(b, y)=0. \tag{3.7}$$

而

$$(y_1, a_k)=0, k=1, 2, \cdots, m \tag{3.8}$$

就是

$$\sum_{j=1}^{m} y_j \bar{a}_{jk} = \sum_{j=1}^{m} \bar{a}_{jk} y_j = 0. \tag{3.9}$$

因此这样的 y 是共轭齐次方程组 $A^* y=0$ 的解. 于是定理 4 得证.

现在回到我们所讨论的方程组(2.7)上来. 当 $\lambda_0=0$ 是矩阵 A_0 的特征值时,同样也是共轭矩阵 A_0^* 的特征值. 与之相应的有 s 维不变子空间 S^* 以及包含在 S^* 内由 A_0^* 的特征向量(与 $\lambda_0=0$ 相应的)所组成的子空间 E_0^*. 按定理 4, 方程组(2.7)有解的充要条件是, 其自由项 y 应属于 E_0^* 的正交补 $E\ominus E_0^*$,即对于任意一个 $z\in E_0^*$ 有$(y, z)=0$.

若 $z_1, z_2, \cdots, z_r$ 组成 E_0^* 空间的基底, 则方程组(2.7)可解的充要条件是,同时有下列 r 个等式成立:

$$(y, z_i)=0 \quad (i=1, 2, \cdots, r). \tag{3.10}$$

若 $y\in E\ominus E_0^*$,则方程组(2.7)的通解有以下形式:

$$x=By+u, \ u\in E_0. \tag{3.11}$$

即方程组 (2.7) 的通解是方程组(2.7)的特解与齐次方程组 $A_0u=0$ 的任意一个解 u 之和, 而 u 是齐次方程组 $A_0u=0$ 的 r 个线性无关解 $u_{i0}(i=1, 2, \cdots, r)$的线性组合, $B=A_0^{-1}$.

此外,可以证明,

$$E\ominus E_0^*=\bar{S}+\bar{E}_1. \tag{3.12}$$

事实上,因为 E_0 和 E_0^* 有相同的维数 r, 而 $\bar{S}+\bar{E}_1$ 是 E_1 的

正交补，E_1 的维数也是 r，所以 $E\ominus E_0^*$ 和 $\bar{S}+\bar{E}_1$ 有相同的维数 $m-r$. 设 $y\in\bar{S}+\bar{E}_1$. 因为 $\bar{S}+\bar{E}_1$ 是算子 B 的定义域，故存在元素 y_1 使得 $y_1=By$，从而 $A_0y_1=y$. 即方程组 (2.7) 有解 $x=y_1$. 由定理 4，$y\in E\ominus E_0^*$. 因此 $\bar{S}+\bar{E}_1\subset E\ominus E_0^*$. 但空间 $\bar{S}+\bar{E}$ 和空间 $E\ominus E_0^*$ 有相同维数，因而两个空间是同一个空间.

注：对于包含在 $\bar{E}_1\subset\bar{S}+\bar{E}_1=E\ominus E_0^*$ 内的基向量 $B^pu_{i0}=u_{ip}(p<n_i-1)$ 来说有下式成立：

$$(B^pu_{i0},\ z_k)=0\left(\begin{matrix}i=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\ p=0,\ 1,\ \cdots,\ n_i-2;\\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r\end{matrix}\right),\tag{3.13}$$

而对于基向量 $u_{i,n_i-1}=B^{n_i-1}u_{i0}\in E_1$ 来说等式 (3.13) 中至少有一个不成立。

§4 线代数方程组的摄动问题

4-1 问题的提出 设 A_0 和 A_1 是 m 阶矩阵，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^T$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$是 m 维向量. 给定方程组

$$A_\varepsilon x=(A_0+\varepsilon A_1)x=y,\tag{4.1}$$

其中 ε 是小参数，当 ε 充分小时 εA_1 可看为矩阵 A_0 的摄动.

我们假定，方程组(3.1)的系数行列式异于零：

$$\Delta_\varepsilon=|A_\varepsilon|=|A_0+\varepsilon A_1|\neq 0.\tag{4.2}$$

那末方程组(4.1)有唯一解 $x=x(\varepsilon)$.

当 $\varepsilon\to 0$ 时矩阵 $A_\varepsilon=A_0+\varepsilon A_1$ 变为矩阵 A_0，方程组(4.1)相应地变为极限方程组(非摄动方程组)：

$$A_0x=y.\tag{4.3}$$

我们的问题是，方程组(4.1)的解 $x(\varepsilon)$ 和方程组(4.3)的解 $x=x_0$ 之间有何关系？在知道方程组(4.3)的解的性质以后，如何来构造方程组(4.1)的解 $x(\varepsilon)$ 关于 ε 的展开式？

在这里将存在两种情况：1) 矩阵 A_0 有逆矩阵 A_0^{-1} 存在，即行列式 $|A_0|\neq 0$，2) 行列式 $|A_0|=0$，此时方程组(4.3)一般不可解．在第一种情况下构造 $x(\varepsilon)$ 的展开式比较简单，在第二种情况下构造过程则相当复杂．

我们先讨论第一种情形，后讨论第二种情形．

4.2　$|A_0|\neq 0$ 情形　在此情况下极限方程组(4.3)对任意自由项 y 都有解并且解是唯一的．设此解为 $x=x_0$．当 ε 充分小时，$\Delta_\varepsilon\neq 0$，摄动方程(4.1)有解 $x=x(\varepsilon)$．现构造 $x(\varepsilon)$ 的展开式为 ε 的幂级数形式：

$$x(\varepsilon)=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots. \tag{4.4}$$

将(4.4)代入方程组(4.1)，我们有

$$A_\varepsilon x(\varepsilon)=(A_0+\varepsilon A_1)(x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2 x_2+\cdots)=y.$$

在上式左端合并 ε 的同幂项并比较等式两端的系数，则得到确定 x_0, x_1, $\cdots$ 的递推方程：

$$\left.\begin{aligned}&A_0x_0=y,\\&A_0x_i=-A_1x_{i-1},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

其中第一个方程就是极限方程(4.3)，x_0 就是极限方程的解，在其余方程中右端都是已知量，由于 $|A_0|\neq 0$，故可唯一求得 x_1, x_2, $\cdots$, x_n, $\cdots$.

易证，级数(4.4)是收敛的．

4.3　$|A_0|=0$ 情形　此时矩阵 A_0 有零特征值 $\lambda_0=0$，极限方程组(3.3)不是对任意右端 y 都是可解的．假定相应的齐次方程组

$$A_0x=0 \tag{4.6}$$

有 r 个线性无关非零解 $x_{i0}(i=1, 2, \cdots, r)$. 它的共轭齐次方程组

$$A_0^* z=0 \tag{4.7}$$

亦有 r 个线性无关非零解 $z_k(k=1, 2, \cdots, r)$, 则由定理 4, 方程组(4.3)有解的充要条件是, 右端 y 应与 $z_k(k=1, 2, \cdots, r)$ 正交:

$$(y, z_k)=0 \quad (k=1, 2, \cdots, r). \tag{4.8}$$

和以前一样, 我们用 E_0 表示由向量 $x_{i0}(i=1, 2, \cdots, r)$所组成的线性生成系, 用 E_0^* 表示由向量 $z_k(k=1, 2, \cdots, r)$所组成的线性生成系.

为了以后的讨论, 我们需要引入广义特征值和广义伴随特征向量这些概念.

设 A_0 和 A_1 都是 m 阶矩阵, 假定$|A_1|\neq 0$, 求 λ 使方程组

$$A_0 x=\lambda A_1 x \tag{4.9}$$

有非零解 x 的问题称为矩阵 A_0 关于矩阵 A_1 的广义特征值问题, 或称关于矩阵(A_0, A_1)的广义特征值问题, 向量 x 称为与 λ 相应的特征向量.

当 A_1 是单位矩阵时, (4.9)就是一般的特征值问题.

与(4.9)相应的特征方程是:

$$P(\lambda)=|A_0-\lambda A_1|=0. \tag{4.10}$$

若 $\lambda=0$ 是此方程的根, 则与之相应的特征向量 x_0 将是齐次方程组

$$A_0 x_0=0 \tag{4.11}$$

的解. 在此情况下我们可以构造广义伴随特征向量链 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$:

$$
\begin{aligned}
&A_0x_1 = -A_1x_0,\\
&A_0x_2 = -A_1x_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&A_0x_{k-1} = -A_1x_{k-2}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

确切地说，向量组 $x_1, \cdots, x_{k-1}$ 是关于矩阵 (A_0, A_1) 与 x_0 相应的伴随特征向量链.

若齐次方程组(4.11)有 r 个线性无关特征向量 x_{i0} $(i=1, 2, \cdots, r)$:

$$
A_0x_{i0}=0 \quad (i=1, 2, \cdots, r),
\tag{4.13}
$$

则可构造分别对应于 x_{i0} $(i=1, 2, \cdots, r)$ 的伴随特征向量链:

$$
(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n_1-1}), \cdots, (x_{r1}, x_{r2}, \cdots, x_{r,n_r-1}),
\tag{4.14}
$$

它们分别满足方程:

$$
\begin{aligned}
&A_0x_{i1} = -A_1x_{i0},\\
&A_0x_{i2} = -A_1x_{i1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&A_0x_{i,n_i-1} = -A_1x_{i,n_i-2}\\
&\quad (i=1, 2, \cdots, r).
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

向量链(4.14)称为关于矩阵(A_0, A_1)与 x_{i0} 相应的伴随特征向量链.

我们有以下引理:

引理 1 设 A_0, A_1 都是 m 阶矩阵, $|A_1|\neq 0$, $\lambda=0$ 是矩阵 A_0 的特征值, 齐次方程组(4.11)有 r 个线性无关特征向量 $x_{i0}(i=1, 2, \cdots, r)$, 则存在关于矩阵$(A_0, A_1)$与 x_{i0} 相应的伴随特征向量链(4.14), 它们分别满足方程(4.15), 其中 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_r$. 此外, 张在向量 A_1x_{i,n_i-1} 上的线性流形 S^1

不包含任何一个与 E_0^* 正交的向量.

证明 因为 $|A_1|\neq 0$, 所以 A_1^{-1} 存在. 设 $\widetilde{B}=A_1^{-1}A_0$[1] 则方程(4.13)和(4.15)可改写为等价形式:

$$\begin{aligned}&\widetilde{B}x_{i0}=0,\\&\widetilde{B}x_{i1}=-x_{i0},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&\widetilde{B}x_{in_i-1}=-x_{i,n_i-2}.\end{aligned}\tag{4.16}$$

根据 Jordan 定理, 我们可以选取与矩阵 $\widetilde{B}$ 的特征值 $\lambda=0$ 相应满足方程(4.16)的特征向量和伴随特征向量 $x_{i,k}$ 构成长度为 n_i 的 Jordan 链. 这样, 引理 1 的前一部分就得到证明. 现证后面一部分. 假定相反, 即存在向量

$$A_1\bar{x}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_iA_1x_{i,n_i-1}$$

与 E_0^* 正交, 其中 $\bar{x}=\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_ix_{in_i-1}$, $\sum\alpha_i^2>0$. 即有

$$(A_1\bar{x},\ z)=0,\ z\in E_0^*.\tag{4.17}$$

于是, 按定理 4, 方程组

$$A_0\bar{x}_1=-A_1\bar{x}\tag{4.18}$$

关于 $\bar{x}_1$ 可解. 显然 $\bar{x}_1$ 也满足下面的方程:

$$\widetilde{B}\bar{x}_1=-\bar{x}=-\sum_{i=1}^{r}\alpha_ix_{i,n_i-1}.\tag{4.19}$$

从而推得 $\bar{x}_1$ 属于不变子空间 S, S 是张在与矩阵 $\widetilde{B}$ 的特征值 $\lambda=0$ 相应的特征向量和伴随特征向量 $x_{i,s}$ $(s\leqslant n_i-1)$ 上的, 因而可将 $\bar{x}_1$ 按 S 的基向量展开:

$$\bar{x}_1=\sum_{\substack{s\leqslant n_i-1\\1\leqslant i\leqslant r}}r_{is}x_{is}.\tag{4.20}$$

---

1) 若 A_0, A_1 是对称矩阵, 但不可交换, 则 $\widetilde{B}=A_1^{-1}A_0$ 一般地是非对称矩阵, 可能有长度大于 1 的 Jordan 链.

根据方程(4.16)我们有

$$\widetilde{B}\bar{x}_1=\sum_{\substack{s\leqslant n_i-1\\1\leqslant i\leqslant r}} r_{is}\widetilde{B}x_{is}=-\sum_{\substack{s\leqslant n_i-1\\1\leqslant i\leqslant r}} r_{is}x_{i,s-1} \tag{4.21}$$

(当 $s-1<0$ 时, $x_{i,s-1}=0$)比较(4.19)和(4.21), 得到

$$\sum_{\substack{s\leqslant n_i-1\\1\leqslant i\leqslant r}} r_{is}\,x_{i,s-1}=\sum_{1\leqslant i\leqslant r}\alpha_i x_{i,n_i-1}. \tag{4.22}$$

但此式右端没有向量 x_{i,n_i-1}, 而向量 x_{is} 是线性无关的, 这就意味着所有$\alpha_i=0$(当 $s>1$ 时亦有 $r_{is}=0$), 与 $\sum\alpha_i^2>0$ 假定矛盾. 从而证得引理 1 的论断.

现在我们分三种情形来讨论方程组(4.1)的解 $x=x(\varepsilon)$ 的展开式.

A) 矩阵 A_0 的特征值 $\lambda=0$ 是一单根, 但关于矩阵(A_0, A_1)无任何伴随特征向量. 此时齐次方程组(4.6)除常数因子外只有一个非零解 x_{10}:

$$A_0x_{10}=0,$$

不存在伴随特征向量 $x_{1i}(i\geqslant1)$. 相应的共轭齐次方程组(4.7)也只有一个解 z_1:

$$A_0^*z_1=0.$$

根据引理 1,

$$M=(A_1x_{10},\ z_1)\neq0. \tag{4.23}$$

求方程组(4.1)的解 $x=x(\varepsilon)$的展开式为以下形式:

$$x(\varepsilon)=\frac{c_0x_{10}}{\varepsilon}+(x_0+c_1x_{10})+\varepsilon(x_1+c_2x_{10})+\cdots$$
$$+\varepsilon^n(x_n+c_{n+1}x_{10})+\cdots, \tag{4.24}$$

其中 c_i 是待定的系数, 向量 x_i 也是需要确定的向量. 为此将展开式(4.24)代入方程组(4.1):

$$(A_0+\varepsilon A_1)\left[\frac{c_0x_{10}}{\varepsilon}+(x_0+c_1x_{10})+\varepsilon(x_1+c_2x_{10})+\cdots\right.$$

$$+\varepsilon^n(x_n+c_{n+1}x_{10})+\cdots\Big]=y. \tag{4.25}$$

合并 ε 的同幂项并令同幂项的系数为零，则得到确定系数 c_i 和向量 x_i 的方程组：

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}:&\quad c_0A_0x_{10}=0,\\ \varepsilon^{0}:&\quad A_0x_0+c_0A_1x_{10}=y,\\ \varepsilon^{i}:&\quad A_0x_i+c_iA_1x_{10}+A_1x_{i-1}=0,\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{aligned} \tag{4.26}$$

(4.26)的第一个方程组，由于 $A_0x_{10}=0$，对任意 c_0 都成立．第二个方程组可改写为：

$$A_0x_0=y-c_0A_1x_{10}, \tag{4.27}$$

它关于 x_0 有解的充要条件是

$$(y-c_0A_1x_{10},\ z_1)=0. \tag{4.28}$$

从而根据(4.23)我们求得

$$c_0=\frac{1}{M}(y,\ z_1). \tag{4.29}$$

知道了 c_0 我们可以求向量 x_0 作为方程组(4.27)的一个特解，并要求

$$(x_0,\ x_{10})=0. \tag{4.30}$$

那末方程(4.27)的通解有以下形式：

$$x_0+c_1x_{10}, \tag{4.31}$$

其中 c_1 暂时未定．

假定我们已求得 c_i 和 x_i $(i\leqslant n-1)$．如何来求 c_n 和 x_n 呢？由(4.26)，向量 x_n 的方程是：

$$A_0x_n+c_nA_1x_{10}+A_1x_{n-1}=0. \tag{4.32}$$

将它改写为

$$A_0x_n=-(A_1x_{n-1}+c_nA_1x_{10}). \tag{4.32'}$$

由可解性条件

$$-(A_1x_{n-1}+c_nA_1x_{10},\ z_1)=0 \tag{4.33}$$

求得

$$c_n=\frac{-1}{M}(A_1x_{n-1},\ z_1). \tag{4.34}$$

然后确定 x_n 作为方程(4.32′)的一个特解，要求它满足关系式：

$$(x_n,\ x_{10})=0. \tag{4.35}$$

因此我们可以逐次确定所有 c_i 和 x_i.

级数(4.24)的收敛性在下面一般情形里一道给予证明.

B) 与 $\lambda=0$ 相应的特征向量只有一个，但存在伴随特征向量. 即

$$\begin{aligned}
&A_0x_{10}=0,\\
&A_0x_{11}=-A_1x_{10},\\
&A_0x_{12}=-A_1x_{11},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&A_0x_{1,n-1}=-A_1x_{1,n-2},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

其中

$$(A_1x_{10},\ z_1)=0,\ (A_1x_{11},\ z_1)=0,\ \cdots,\ (A_1x_{1,n-2},\ z_1)=0,$$

而 $(A_1x_{1,n-1},\ z_1)\neq 0$, z_1 是共轭齐次方程 $A^*z=0$ 的非零解.

求方程组(4.1)的解 $x=x(\varepsilon)$ 的展开式为以下形式：

$$\begin{aligned}
x(\varepsilon)=&\frac{c_{10}x_{10}}{\varepsilon^n}+\frac{c_{10}x_{11}+c_{11}x_{10}}{\varepsilon^{n-1}}+\cdots\\
&+\frac{c_{10}x_{1,n-1}+c_{11}x_{1,n-2}+\cdots+c_{1,n-1}x_{10}}{\varepsilon}\\
&+\varepsilon^0(x_0+c_{11}x_{1,n-1}+c_{12}x_{1,n-2}+\cdots+c_{1,n}x_{10})\\
&+\varepsilon(x_1+c_{12}x_{1,n-1}+c_{13}x_{1,n-2}+\cdots+c_{1,1+n}x_{10})+\cdots\\
&+\varepsilon^s(x_s+c_{1,s+1}x_{1,n-1}+c_{1,s+2}x_{1,n-2}+\cdots\\
&+c_{1,s+n}x_{10})+\cdots.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

代入(4.1):

$$(A_0+\varepsilon A_1)\left\{\frac{c_{10}x_{10}}{\varepsilon^n}+\frac{c_{10}x_{11}+c_{11}x_{10}}{\varepsilon^{n-1}}+\cdots\right.$$

$$+\frac{c_{10}x_{1,n-1}+c_{11}x_{1,n-2}+\cdots+c_{1,n-1}x_{10}}{\varepsilon}$$

$$+\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s(x_s+c_{1,s+1}x_{1,n-1}+c_{1,s+2}x_{1,n-2}+\cdots$$

$$\left.+c_{1,s+n}x_{10})\right\}=y. \tag{4.38}$$

合并 ε 的同幂项比较方程两端的系数,我们有

ε^{-n}: $c_{10}A_0x_{10}=0$ (由(4.36)第一个方程);

ε^{-n+1}: $A_0(c_{10}x_{11}+c_{11}x_{10})+A_1c_{10}x_{10}$

$=c_{10}A_0x_{11}+c_{11}A_0x_{10}+c_{10}A_1x_{10}$

$=c_{10}(A_0x_{11}+A_1x_{10})+c_{11}A_0x_{10}$

$=0$ (由(4.36)第一、二两个方程);

ε^{-n+2}: $A_0(c_{10}x_{12}+c_{11}x_{11}+c_{12}x_{10})+A_1(c_{10}x_{11}+c_{11}x_{10})$

$=c_{10}(A_0x_{12}+A_1x_{11})+c_{11}(A_0x_{11}+A_1x_{10})$

$+c_{12}A_0x_{10}=0$

(由(4.36)的最初三个方程);

…………………………………………;

ε^{-1}: $A_0(c_{10}x_{1,n-1}+c_{11}x_{1,n-2}+\cdots+c_{1,n-1}x_{10})$

$+A_1(c_{10}x_{1,n-2}+c_{11}x_{1,n-3}+\cdots+c_{1,n-2}x_{10})$

$=c_{10}(A_0x_{1,n-1}+A_1x_{1,n-2})+c_{11}(A_0x_{1,n-2}$

$+A_1x_{1,n-3})+\cdots+c_{1,n-2}(A_0x_{11}+A_1x_{10})$

$+c_{1,n-1}A_0x_{10}=0$ (由(4.36)).

因此在(4.38)中所有 ε 负幂的系数都等于零,而

ε^0: $A_0x_0+c_{11}A_0x_{1,n-1}+c_{12}A_0x_{1,n-2}+\cdots$

$+c_{1,n}A_0x_{10}+c_{10}A_1x_{1,n-1}+c_{11}A_1x_{1,n-2}+\cdots$

$$+c_{1,n-1}A_1x_{10}=y. \tag{4.39}$$

由方程(4.36)得到

$$A_0x_0=y-c_{10}A_1x_{1,n-1}. \tag{4.40}$$

这是一个非齐次方程组，选取常数 c_{10} 使之可解. 按定理 4，此方程组有解的充要条件是:

$$(y-c_{10}A_1x_{1,n-1},\ z_1)=0.$$

从而得到

$$c_{10}=\frac{(y,\ z_1)}{(A_1x_{1,n-1},\ z_1)},\quad (A_1x_{1,n-1},\ z_1)\neq 0. \tag{4.41}$$

求 x_0 作为方程组(4.40)的一个特解，要求它:

$$(x_0,\ x_{10})=0.$$

假定我们已求得系数 c_{1p} 和向量 $x_p(p\leqslant s-1)$. 现在来求系数 c_{1s} 和向量 x_s. 在(4.38)中，令 ε^s 的系数为零，我们有

$$\begin{aligned}A_0x_s&+c_{1,s+1}A_0x_{1,n-1}+c_{1,s+2}A_0x_{1,n-2}+\cdots\\&+c_{1,s+n}A_0x_{10}+A_1x_{s-1}+c_{1,s}A_1x_{1,n-1}\\&+c_{1,s+1}A_1x_{1,n-2}+\cdots+c_{1,s+n-1}A_1x_{10}=0.\end{aligned} \tag{4.42}$$

由方程组(4.36)，上一方程组可化简为

$$A_0x_s=-A_1x_{s-1}-c_{1s}A_1x_{1,n-1}. \tag{4.43}$$

此方程组关于向量 x_s 有解的充要条件是:

$$-(A_1x_{s-1},\ z_1)-(c_{1s}A_1x_{1,n-1},\ z_1)=0.$$

从而得到

$$c_{1s}=-\frac{(A_1x_{s-1},\ z_1)}{(A_1x_{1,n-1},\ z_1)}. \tag{4.44}$$

求得 c_{1s} 以后，我们求向量 x_s 作为方程组(4.43)的一个特解，要求它: $(x_s,\ x_{10})=0$.

如此我们可逐次求得所有系数 c_{1s} 和向量 x_s.

可以证明，级数(4.37)是收敛的，也将它放在下面的一般情形中去研究.

C) 一般情形，假定齐次方程组(4.11)有 r 个线性无关特征向量 $x_{i0}(i=1, 2, \cdots, r)$ 以及关于矩阵(A_0, A_1)对应于 x_{i0} 的伴随特征向量：$(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1,n_1-1}), \cdots, (x_{r1}, x_{r2}, \cdots, x_{r,n_r-1})$，它们分别满足方程(4.13)和(4.15). 相应的共轭齐次方程组(4.7)亦有 r 个线性无关非零解 $z_k\ (k=1, 2, \cdots, r)$.

我们构造方程组(4.1)的解 $x(\varepsilon)$的以下形式的展开式:

$$
\begin{aligned}
x(\varepsilon) = & \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{c_{i0}x_{i0}}{\varepsilon^{n_i}} + \frac{c_{i0}x_{i1}+c_{i1}x_{i0}}{\varepsilon^{n_i-1}} + \cdots \right. \\
& \left. + \frac{c_{i0}x_{i,n_i-1}+c_{i1}, \ x_{i,n_i-2}+\cdots+c_{in_i-1}x_{i0}}{\varepsilon}\right) \\
& + \varepsilon^0\left[x_0+\sum_{i=1}^{r}(c_{i1}x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{i,n_i}x_{i0})\right]+\cdots \\
& + \varepsilon^s\left[x_s+\sum_{i=1}^{r}(c_{i,s+1}x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{i,s+n_i}x_{i0})\right]+\cdots.
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

将它代入方程组(4.1)以确定系数 c_{im} 和向量 x_p:

$$
\begin{aligned}
(A_0+\varepsilon A_1)\Bigg\{ & \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{c_{i0}x_{i0}}{\varepsilon^{n_i}} + \frac{c_{i0}x_{i1}+c_{i1}x_{i0}}{\varepsilon^{n_i-1}} + \cdots \right. \\
& \left. + \frac{c_{i0}x_{i,n_i-1}+c_{i1}x_{i,n_i-2}+\cdots+c_{i,n_i-1}x_{i0}}{\varepsilon}\right) \\
& + \varepsilon^0\left[x_0+\sum_{i=1}^{r}(c_{i1}x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{in_i}x_{i0})+\cdots\right. \\
& \left. + \varepsilon^s\left[x_s+\sum_{i=1}^{r}(c_{i,s+1}x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{i,s+n_i}x_{i0})\right]+\cdots\right] \\
= y. &
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

比较方程(4.46)两端的 ε 的同幂系数，和情形 B 一样，根据

方程(4.13)和(4.15)所有 ε 负幂的系数都等于零，而

$$\varepsilon^0:\quad A_0x_0+\sum_{i=1}^{r}(c_{i1}A_0x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{in_i}A_0x_{i0})$$
$$+\sum_{i=1}^{r}(c_{i0}A_1x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{i,n_i-1}A_1x_{i0})=y. \tag{4.47}$$

由方程(4.13)和(4.15)，此方程组可化简为

$$A_0x_0=y-\sum_{i=1}^{r}c_{i0}A_1x_{i,n_i-1}. \tag{4.48}$$

这是关于 x_0 的非齐次方程组，选取系数 c_{i0} 使之可解. 我们知道，有解的充要条件是：

$$\left(y-\sum_{i=1}^{r}c_{i0}A_1x_{i,n_i-1},\ z_k\right)=0\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

或

$$\sum_{i=1}^{r}(A_1x_{i,n_i-1},z_k)c_{i0}=(y,z_k)\quad(\text{设 } b_k=(y,\ z_k)) \tag{4.49}$$
$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r).$$

这是关于 c_{i0} 的代数方程组，它的系数行列式是：

$$\Delta=\det\|(A_1x_{i,n_i-1},\ z_k)\|. \tag{4.50}$$

可以证明，

$$\Delta\neq0. \tag{4.51}$$

事实上，若矩阵列的一线性组合为零：

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i(A_1x_{i,n_i-1},\ z_k)=0,\ \text{对于}\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r \tag{4.52}$$
$$(\sum\alpha_i^2>0).$$

这就表示向量 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_iA_1x_{i,n_i-1}$ 与张在向量 $z_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 上的子空间 E_0^* 正交. 按引理 1，这是不可能的，因此方程组(4.49)的系数行列式异于零. 解方程组(4.49)得到

$$c_{i0}=\Gamma_i\bar{b}_0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r), \tag{4.53}$$

其中 $\bar{b}_0=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_r)$，$\Gamma_i$——是逆矩阵相应的行．求得 c_{i0} 以后，再求方程组(4.48)的特解 x_0，可以要求它：

$$(x_0,\ x_{i0})=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r).$$

那末我们有

$$x_0=W\left(y-\sum_{i=1}^{r}c_{i0}A_1x_{i,n_i-1}\right),$$

其中 W 是相应的逆算子．

假定我们已定出系数 c_{ip} 和向量 $x_p(p\leqslant s-1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$．现在来求系数 c_{is} 和向量 x_s．在(4.46)中令 ε^s 的系数为零：

$$A_0x_s+\sum_{i=1}^{r}(c_{i,s+1}A_0x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{i,n_i+s}A_0x_{i0})+A_1x_{s-1}$$

$$+\sum_{i=1}^{r}(c_{i,s}A_1x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{i,n_i+s-1}A_1x_{i0})=0. \tag{4.54}$$

由方程(4.13)和(4.15)，此方程组可化简为

$$A_0x_s=-A_1x_{s-1}-\sum_{i=1}^{r}c_{is}A_1x_{i,n_i-1}. \tag{4.55}$$

根据可解性条件，我们得到关于 c_{is} 的代数方程组：

$$-(A_1x_{s-1},\ z_k)-\sum_{i=1}^{r}c_{is}(A_1x_{i,n_i-1},\ z_k)=0 \tag{4.56}$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r),$$

其系数行列式 $\Delta\neq0$，因此

$$c_{is}=\Gamma_i\bar{b}_s, \tag{4.57}$$

其中 $\bar{b}_s=-((A_1x_{s-1},\ z_1),\ \cdots,\ (A_1x_{s-1},\ z_r))$．再求 x_s 作为方程组(4.55)的特解，要求它：

$$(x_s,\ x_{i0})=0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ r).$$

从而我们有

$$x_s = W\left(-A_1 x_{s-1} - \sum_{i=1}^{r} c_{is} A_1 x_{i,n_i-1}\right). \tag{4.58}$$

如此可逐次求得级数(4.45)中所有系数 c_{is} 和向量 x_s.

最后,我们来证明级数(4.45)对于充分小的 ε 是收敛的.

事实上,按系数 c_{is} 的表达式(4.57)我们有

$$|c_{is}| \leqslant K\|\bar{b}_s\| \leqslant K_1\|x_{s-1}\|, \tag{4.59}$$

其中$\| \quad \|$是向量空间 E 中的范数. 由(4.58)和(4.59)推得

$$\|x_s\| \leqslant K_2\|x_{s-1}\| + K_3\sum_{i=1}^{r}|c_{is}| \leqslant K_4\|x_{s-1}\| \leqslant K_4^s\|x_0\|. \tag{4.60}$$

现在来估计级数(4.45)的一般项 a_s:

$$a_s = x_s + \sum_{i=1}^{r}(c_{i,s+1}x_{i,n_i-1} + \cdots + c_{i,s+n_i}x_{i0}).$$

由(4.59)我们有

$$\begin{aligned}\|a_s\| &= \left\|x_s + \sum_{i=1}^{r}(c_{i,s+1}x_{i,n_i-1} + \cdots + c_{i,s+n_i}x_{i0})\right\| \\ &\leqslant \|x_s\| + \sum_{i=1}^{r}(K_1\|x_s\|\|x_{i,n_i-1}\| + \cdots + K_1\|x_{s+n_i-1}\|\|x_{i0}\|) \\ &\leqslant \|x_s\| + K_5(\|x_s\| + \|x_{s+1}\| + \cdots + \|x_{s+n_1-1}\|) \end{aligned} \tag{4.61}$$

再由(4.60),得到

$$\begin{aligned}\|a_s\| \leqslant K_4^s\|x_0\| + K_5(K_4^s + K_4^{s+1} + \cdots \\ + K_4^{s+n_1-1})\|x_0\| \leqslant K_6 K_4^s.\end{aligned} \tag{4.62}$$

因此,级数(4.45)当$|\varepsilon| < \dfrac{1}{K_4}$时在空间 E 的范数$\| \quad \|$意义下收敛.

如果我们的迭代过程到 $s(s>n_1)$步为止,确定了系数 $c_{ip}(p\leqslant s)$ 和向量 $x_p(p\leqslant s)$,则得到级数(4.45)的有限项:

$$\tilde{x}_s(\varepsilon)=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{c_{i0}x_{i0}}{\varepsilon^{n_i}}+\cdots+\frac{c_{i0}x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{i,n_i-1}x_{i0}}{\varepsilon}\right)$$
$$+\varepsilon^0\left[x_0+\sum_{i=1}^{r}(c_{i1},\ x_{i,n_i-1}+\cdots+c_{in_i}x_{i0})\right]$$
$$+\cdots+\varepsilon^{s-2}\left[x_{s-2}+\sum_{i=1}^{r}(c_{i,s-1}x_{i,n_i-1}+c_{is}x_{i,n_i-2})\right]$$
$$+\varepsilon^{s-1}\left[x_{s-1}+\sum_{i=1}^{r}c_{is}x_{i,n_i-1}\right]+\varepsilon^s x_s. \tag{4.63}$$

因此，
$$x(\varepsilon)-\tilde{x}_s(\varepsilon)=O(\varepsilon^{s-n_1+1}).$$

从而推得
$$\|x(\varepsilon)-\tilde{x}_s(\varepsilon)\|\leqslant c\varepsilon^{s-n_1+1}. \tag{4.64}$$

§5 矩阵特征值和特征向量的摄动问题

5-1 问题的提出 设 A_0 和 A_1 是 m 维空间 E 中的矩阵(算子)，A_0^* 是 A_0 的共轭矩阵，$A_\varepsilon=A_0+\varepsilon A_1$ 和以前一样是由 A_0 和 A_1 组成的摄动矩阵，ε 是小参数，$A_\varepsilon\in(E\to E)$.

我们再回忆一下§2所用的符号和术语，假定矩阵 A_0 有零特征值 $\lambda=0$. 相应地，共轭矩阵 A_0^* 亦有零特征值 $\lambda=0$. 存在一个与 $\lambda=0$ 相应的矩阵 A_0 的 s 维不变子空间 S，它是由与 $\lambda=0$ 相应的矩阵 A_0 的特征向量 u_0 和伴随特征向量 $u_i(i=1,2,\cdots,k-1)$(参看(2.4)，(2.5)，(2.6))所组成，这些向量满足方程组：

$$\begin{aligned}&A_0u_0=0,\\&A_0u_1=u_0,\\&A_0u_2=u_1,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&A_0u_{k-1}=u_{k-2}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

而方程组

$$A_0 u_k = u_{k-1} \tag{5.2}$$

不可解，向量 $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$ 形成长度为 k 的 Jordan 链. 如果齐次方程 $A_0 u=0$ 有 r 个线性无关非零向量 u_{i0}, $i=1, 2, \cdots, r$, 则存在与每一个 u_{i0} 相应的伴随特征向量链 $u_{i1}, \cdots, u_{i,n_i-1}$, 它们和 u_{i0} 形成一个长度为 n_i 的 Jordan 链. 按 Jordan 定理，可选取特征向量 u_{i0} 和伴随特征向量 $u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{i,n_i-1}$ 为不变子空间 S 的基底. 整个空间 E 可分解为不变子空间 S 和 $\bar{S}$ 的直接和:

$$E=S+\bar{S}, \tag{5.3}$$

其中 $\bar{S}$ 是由矩阵 A_0 的与其余特征值相应的特征向量和伴随特征向量所组成. 空间 E 还可分解为以下的直接和:

$$E=S+\bar{S}=E_0+\bar{E}_0+\bar{S}=E_1+\bar{E}_1+\bar{S}, \tag{5.4}$$

其中 E_0 由向量$\{u_{i0}\}$$(i=1, 2, \cdots, r)$所组成, $\bar{E}_0$ 由向量$\{u_{ij}\}$$(j>0)$所组成, E_1 由最高阶伴随特征向量$\{u_{i,n_i-1}\}$ $(i=1, 2, \cdots, r)$所组成, $\bar{E}_1$ 由向量$\{u_{i,j}\}$$(0\leqslant j<n_i-1)$所组成. 算子 A_0 在 $\bar{S}$ 内有逆算子 A_0^{-1}, 设 $A_0^{-1}=B$, 再由(2.11), 算子 A_0 将 $\bar{E}_0$ 的每个元素变为 $\bar{E}_1$ 的元素, 而 $A_0E_0=0$. 因此 A_0 将 E_0 的正交补 $\bar{S}+\bar{E}_0$ 变为 E_1 的正交补 $\bar{S}+\bar{E}_1$. 从而算子 B 将 $\bar{S}+\bar{E}_1$ 映射为 $\bar{S}+\bar{E}_0$. $\bar{S}+\bar{E}_1$ 是算子 B 的定义域, 而 $\bar{S}+\bar{E}_0$ 是算子 B 的值域. 算子 A_0 的特征向量(与 $\lambda=0$ 相应)和伴随特征向量可写为

$$(u_{i0},\ u_{i1}=Bu_{i0},\ u_{i2}=B^2u_{i0},\ \cdots,\ u_{i,n_i-1}=B^{n_i-1}u_{i0}) \tag{5.5}$$

$$(i=1, 2, \cdots, r).$$

设 $z_k(k=1, 2, \cdots, r)$是共轭矩阵 A_0^* 的 r 个线性无关特征向量(与 $\lambda=0$ 相应), 则由方程组可解的充要条件, 对于每

一个固定的 i 我们有

$$(u_{i,j},\ z_k)=0 \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ n_i-2;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r). \tag{5.6}$$

而

$$(u_{i,n_i-1},\ z_k)\neq 0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r). \tag{5.7}$$

从而

$$(B^{p-1}u_{i0},\ z_k)=0 \quad (p<n_i)(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r). \tag{5.8}$$

$$(B^{n_i-1}u_{i0},\ z_k)\neq 0 \quad (\text{至少对于一个 } k). \tag{5.9}$$

此外，根据 § 3 的讨论

$$E\ominus E_0^*=\bar{S}+\bar{E}_1, \tag{5.10}$$

其中 E_0^* 是由 $\{z_k\}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$ 所组成的线性生成系和 E_0 有相同的维数 r. 因此 $E\ominus E_0^*$ 也是算子 B 的定义域.

矩阵 A_ε 的特征值问题: 求 λ_ε 使方程组

$$A_\varepsilon v_\varepsilon=(A_0+\varepsilon A_1)v_\varepsilon=\lambda_\varepsilon v_\varepsilon \tag{5.11}$$

有非零解 v_ε. λ_ε 称为矩阵 A_ε 的特征值, v_ε 称为与 λ_ε 相应的特征向量, 其中 $|A_\varepsilon|=|A_0+\varepsilon A_1|\neq 0$.

当 $\varepsilon=0$ 时有相应的矩阵 A_0 的特征值问题:

$$A_0v_0=\lambda_0v_0. \tag{5.12}$$

方程

$$P_\varepsilon(\lambda_\varepsilon)=|A_\varepsilon-\lambda_\varepsilon I|=|A_0+\varepsilon A_1-\lambda_\varepsilon I|=0 \tag{5.13}$$

是矩阵 A_ε 的特征方程. 方程

$$P_0(\lambda_0)=|A_0-\lambda_0 I|=0 \tag{5.14}$$

是矩阵 A_0 的特征方程.

我们的问题是, 特征值 λ_ε 和特征值 λ_0, 特征向量 v_ε 和特征向量 v_0 之间有何联系? 如何来构造 λ_ε 和 v_ε 关于 ε 的展开式?

和线代数方程组一样, 也存在两种情形, 即 $\lambda_0\neq 0$

$(|A_0|\neq 0)$ 和 $\lambda_0=0(|A_0|=0)$. 第一种情形比较简单，我们主要讨论第二种情形.

若 $\lambda_0=0$ 是特征方程(5.14)的 s 重根，在一定条件下(即下面的条件 Γ)特征方程(5.13)有 s 个不同的根与之相应，并且这些根当 $\varepsilon\to 0$ 时趋近于零(见 §1 例题(1.9), (1.10)). 此外，它们关于 ε 的展开式可能是 ε 的整数幂也可能是 ε 的分数幂(见(1.19)和 §1 最后的例题). 我们讨论的特征值 λ_ε 也是这种类型代数方程 $P_\varepsilon(\lambda)=0$ 的根，因此，λ_ε 一般地按 ε 的分数幂 $\varepsilon^{\frac{1}{n_i}}$ 展开. 可以证明(见[2]), n_i 是与 $\lambda_0=0$ 相应的 Jordan 链的长度. 对于相应的特征向量 v_ε 亦有类似的展开式.

为简单起见，我们只讨论以下两种情形:

情形 I $\lambda_0=0$ 是方程 $P_0(\lambda)=0$ 的单根，与它相应的不变子空间 S 是一维的: $S=E_0=E_1=\{tu_0\}$, 其中 u_0 是与 $\lambda_0=0$ 相应的特征向量:

$$A_0u_0=0. \tag{5.15}$$

矩阵 A_0 的共轭矩阵 A_0^* 也只有一个(除常数因子外)特征向量 z_0 与 $\lambda_0=0$ 相应. 因此 E_0 和 E_0^* 都是直线:

$$E_0=\{tu_0\},\ E_0^*=\{tz_0\}. \tag{5.16}$$

情形 II 与 $\lambda_0=0$ 相应的特征向量只有一个(除常数因子外)，但存在长度大于 1 的 Jordan 链$(u_0, Bu_0, \cdots, B^{n-1}u_0)$, 其中 n 是 Jordan 链的长度.

关于更一般情形，请读者参看[2].

现就以上两种情形分别讨论特征值 λ_ε 和特征向量 v_ε 展开式的构造.

情形 I 在此情况下特征值 λ_ε 和特征向量 v_ε 可按 ε 的

整数幂展开:

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k \quad (\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 \neq 0), \tag{5.17}$$

$$v_\varepsilon = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \varepsilon^j, \quad v_0 \neq 0. \tag{5.18}$$

为了确定展开式中的 λ_k 和 v_j, 将展开式代入方程(5.11),我们有

$$0 = (A_\varepsilon - \lambda_\varepsilon I) v_\varepsilon = \left(A_0 + \varepsilon A_1 - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^k \right) I \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} v_j \varepsilon^j \right), \tag{5.19}$$

合并 ε 的同幂项并令其系数为零,则得到方程组

$$A_0 v_0 = 0, \tag{5.20$_0$}$$

$$A_0 v_k = b_k, \tag{5.20$_k$}$$

其中

$$b_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_{k-j} - A_1 v_{k-1}, \quad k \geqslant 1. \tag{5.21$_k$}$$

由(5.20$_0$)我们知道, v_0 是与 $\lambda_0 = 0$ 相应的特征向量, $v_0 \in E_0$. 再由 § 3 定理 4, 若方程组(5.20$_k$)的右端 b_k 满足关系式:

$$(b_k,\ z_0) = 0, \tag{5.22}$$

则方程组(5.20$_k$)是可解的. 方程(5.20) 和 (5.22)可以用来逐次确定 λ_k 和 v_k.

由于不变子空间 S 是一维的, 没有伴随特征向量, 因此按(5.9)(此时 $n_i = n = 1$)

$$(u_0,\ z_0) \neq 0. \tag{5.23}$$

可以标准化 z_0 使得

$$(u_0,\ z_0) = 1. \tag{5.24}$$

因为 $v_0 \in E_0$, 所以

$$v_0 = t u_0. \tag{5.25}$$

特征向量 v_ε 除去一个可能依赖于 ε 的数因子外是唯一

确定的. 我们将它标准化, 要求它:

$$(v_\varepsilon,\ z_0)=1. \tag{5.26}$$

从而根据(5.24)和(5.26)我们有

$$1=\left(v_0+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j v_j,\ z_0\right)=t(u_0,\ z_0)+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j(v_j,\ z_0)$$

$$=t+\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j(v_j,\ z_0), \tag{5.27}$$

上式对任意 ε 都成立. 由此推得

$$t=1,\quad \text{即}\quad v_0=u_0, \tag{5.28}$$

$$(v_j,\ z_0)=0\quad (j=1,\ 2,\ \cdots). \tag{5.29}$$

若条件(5.22)成立, 则方程组(5.20_k)可解, 并且它的解可表示为

$$v_k=Bb_k+u_k, \tag{5.30}$$

其中 $B=A_0^{-1}$, 它的定义域是 $\bar{S}+\bar{E}_1$, 值域是 $\bar{S}+\bar{E}_0$, 在我们所讨论的情形下 $\bar{E}_1=\bar{E}_0=0$, 因此 B 的定义域和值域都是 $\bar{S}$, 向量 $u_k\in E_0$, 即

$$u_k=t_k u_0. \tag{5.31}$$

由(5.10)我们有

$$E\ominus E_0^*=\bar{S}. \tag{5.32}$$

于是,

$$\bar{S}\perp E_0^*=\{tz_0\}. \tag{5.33}$$

即对任意一个形如 Bx 的向量, 由于 $Bx\in\bar{S}$, 都有

$$(Bx,\ z_0)=0. \tag{5.34}$$

因此由(5.29), (5.30)和(5.24)推得

$$0=(v_k,\ z_0)=(Bb_k+u_k,\ z_0)=(Bb_k+t_k u_0,\ z_0)$$

$$=t_k(u_0,\ z_0)=t_k.$$

所以 $t_k=0(k\geqslant1)$. 因而 $u_k=0(k\geqslant1)$. 方程组(5.20_k)的解为:

$$v_k = Bb_k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots). \tag{5.35}$$

由 b_k 的表达式(5.21_k)，当 $k=1$ 时我们有

$$b_1 = \lambda_1 v_0 - A_1 v_0 = \lambda_1 u_0 - A_1 u_0. \tag{5.36}$$

利用条件(5.22)和等式(5.24)得到

$$0 = (b_1,\ z_0) = \lambda_1 - (A_1 u_0,\ z_0).$$

设$(A_1 u_0,\ z_0) = \bar{c}$，并假定

$$(A_1 u_0,\ z_0) \neq 0, \tag{5.37}$$

则得到

$$\lambda_1 = \bar{c} = (A_1 u_0,\ z_0), \tag{5.38}$$

并且 $\lambda_1 \neq 0$. 求得 λ_1 以后，由(5.36)求出 b_1，解方程组(5.35)$(k=1)$即得向量 v_1.

条件(5.37)是我们讨论过程的附加条件，称它为**条件 Γ**. 它保证：若 $\lambda_0=0$ 是矩阵 A_0 的 s 重特征值，则摄动矩阵确有 s 个特征值与之相应，并且当 $\varepsilon\to 0$ 时趋近于零(参看[2]).

假定我们已求得 λ_i 和 $v_i(i<k)$. 现在来求 λ_k 和 v_k. 由(5.21_k)

$$b_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_{k-j} - A_1 v_{k-1} = \lambda_k v_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_{k-j} - A_1 v_{k-1}. \tag{5.39}$$

设

$$U_k = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j v_{k-j} - A_1 v_{k-1}, \tag{5.40}$$

则

$$b_k = \lambda_k v_0 + U_k. \tag{5.41}$$

根据假定，λ_i 和 $v_i(i<k)$都已求得，因此 U_k 是已知向量. 利用条件(5.22)和等式(5.24)我们有

$$0 = (b_k,\ z_0) = (\lambda_k v_0 + U_k,\ z_0) = \lambda_k + (U_k,\ z_0).$$

从而得到

$$\lambda_k = -(U_k,\ z_0), \tag{5.42}$$

求得 λ_k 以后，我们可以按(5.39)定出 b_k，代入(5.35)求出 v_k. 因此迭代过程得以实现，可逐次确定级数(5.17)和(5.18)的系数 λ_k 和向量 v_j.

情形 II 存在长度为 $n(n>1)$ 的 Jordan 链 $(u_0, Bu_0, \cdots, B^{n-1}u_0)$.

在此情况下特征值 λ_ε 和特征向量 v_ε 应按 ε 的分数幂 $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ 展开：

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon^{\frac{k}{n}} \quad (\lambda_0 = 0,\ \lambda_1 \neq 0), \tag{5.43}$$

$$v_\varepsilon = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \varepsilon^{\frac{j}{n}} \quad (v_0 \neq 0), \tag{5.44}$$

其中 n 就是 Jordan 链的长度.

类似地，将它代入方程(5.11)，令 ε 的同幂项系数为零，则得到方程组

$$A_0 v_0 = 0, \tag{5.45$_0$}$$

$$A_0 v_k = b_k, \tag{5.45$_k$}$$

其中

$$b_k = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_{k-j} & (0<k<n), \\ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_{k-j} - A_1 v_{k-n} & (k \geqslant n). \end{cases} \tag{5.46}$$

方程组(5.45$_0$)是齐次方程组，它的非零解 v_0 是与 λ_0 相应的特征向量，所以 $v_0 \in E_0$. 方程组(5.45$_k$)是非齐次方程组，根据 §3 定理 4，它可解的充要条件是：

$$(b_k,\ z_0) = 0, \tag{5.47}$$

其中 z_0 是与 $\lambda_0 = 0$ 相应共轭矩阵 A_0^* 的特征向量，它和 u_0 一样除常数因子外也只有一个，$z_0 \in E_0^*$. 这里的 E_0, E_0^* 和情形 I 一样都是一维不变子空间：

$$E_0=\{tu_0\},\ E_0^*=\{tz_0\}. \tag{5.48}$$

因此,

$$v_0=tu_0,\ t\neq 0. \tag{5.49}$$

根据假定,存在长度为 n 的 Jordan 链:

$$(u_0,\ u_1=Bu_0,\ \cdots,\ u_{n-1}=B^{n-1}u_0),$$

并且

$$(B^{p-1}u_0,\ z_0)=0 \quad (p<n)(\text{参看}(5.8)), \tag{5.50}$$

$$(B^{n-1}u_0,\ z_0)\neq 0 \quad (\text{参看}(5.9)).$$

我们可以标准化 z_0 使得

$$(B^{n-1}u_0,\ z_0)=1. \tag{5.51}$$

对于给定的 n 现在来确定展开式(5.43)和(5.44)中的系数 λ_k 和向量 v_j.

关于向量 z_0,和矩阵 A_0 一样,亦存在共轭矩阵 A_0^* 的伴随特征向量 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_{n-1}$,它们满足下面方程:

$$\begin{aligned} &A_0^*z_1=z_0,\\ &A_0^*z_2=z_1,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ &A_0^*z_{n-1}=z_{n-2}, \end{aligned} \tag{5.52}$$

而

$$A_0^*z=z_{n-1} \tag{5.53}$$

不可解. 类似地,我们有

$$(z_{n-1},\ u_0)\neq 0,\ u_0\in E_0.$$

我们可以标准化 z_{n-1} 使得

$$(u_0,\ z_{n-1})=1. \tag{5.54}$$

设 $z_{n-1}=z^*$,则有

$$(u_0,\ z^*)=1. \tag{5.54'}$$

当 $n=1$ 时, $z^*=z_0$, 等式 (5.54′) 即等式(5.24). 因此这里所取的 z^* 就是共轭矩阵 A_0^* 关于 z_0 的最高阶($n-1$ 阶)伴随特征向量.

我们再标准化 v_ε 使得

$$(v_\varepsilon, z^*)=1 \quad (\text{对任意 } \varepsilon). \tag{5.55}$$

重复前面导出(5.28)和(5.29)的讨论，由(5.54′)和(5.55)推得 $t=1$，即

$$v_0=u_0 \tag{5.56}$$

和

$$(v_k, z^*)=0 \quad (k\geqslant 1). \tag{5.57}$$

因此 v_0 就是特征向量 u_0. 此外，条件(5.47)表明，$b_k\in E-E_0^*=\overline{S}+\overline{E}_1$，即 b_k 属于算子 B 的定义域. 条件(5.57)表明，向量 v_k 属于算子 B 的值域 $\overline{S}+\overline{E}_0$. 因此

$$v_k=Bb_k. \tag{5.58}$$

求得 b_k 以后我们可以得到向量 v_k. 下面我们来叙述逐次确定 λ_k, b_k 和 v_k 的过程.

当 $n>1$ 时，根据(5.45_1)和(5.46)我们有

$$A_0v_1=b_1, \quad b_1=\lambda_1 v_0=\lambda_1 u_0. \tag{5.59}$$

于是，

$$v_1=Bb_1=\lambda_1 Bu_0. \tag{5.60}$$

此时 λ_1 仍是未知的.

当 $n>2$ 时，由(5.45_2)、(5.46)和(5.60)我们有

$$b_2=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_0=\lambda_1^2 Bu_0+\lambda_2 u_0, \tag{5.61}$$

$$v_2=Bb_2=\lambda_1^2 B^2 u_0+\lambda_2 Bu_0, \tag{5.62}$$

其中 λ_1, λ_2 仍是未知的.

当 $n>3$ 时，由(5.45_3)、(5.46)和(5.60)、(5.62)我们有

$$b_3=\lambda_1^3 B^2 u_0+2\lambda_1\lambda_2 Bu_0+\lambda_3 u_0, \tag{5.63}$$

$$v_3=Bb_3=\lambda_1^3 B^3 u_0+2\lambda_1\lambda_2 B^2 u_0+\lambda_3 Bu_0, \tag{5.64}$$

其中 λ_1, λ_2, λ_3 仍是未知的.

一般地，$b_k(k<n)$的表达式是以 $B^{p-1}u_0(1\leqslant p\leqslant k)$这样一些项来表示的，其系数与 λ_s 有关，我们将它表示为：

$$\alpha(k,\ p)=\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_p=k}{}' \lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\cdots\lambda_{s_p} \tag{5.65}$$

和 $\sum'$ 是按 p 个自然数$(s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_p)$的一切可能的组合来取的，但要求 $s_1+s_2+\cdots+s_p=k$. 例如

$$\alpha(1,\ 1)=\lambda_1,$$

$$\alpha(2,\ 2)=\lambda_1^2,\ \alpha(2,\ 1)=\lambda_2,$$

$$\alpha(3,\ 3)=\lambda_1^3,\ \alpha(3,\ 2)=2\lambda_1\lambda_2,\ \alpha(3,\ 1)=\lambda_3.$$

向量 v_k 的表达式是以 $B^p u_0$ 这样一些项来表示的，其系数与 b_k 表达式的系数相同.

当 $n>k$ 时，b_k 和 v_k 有如下的表达式：

$$\left.\begin{aligned} b_k&=\alpha(k,\ k)B^{k-1}u_0+\alpha(k,\ k-1)B^{k-2}u_0+\cdots+\alpha(k,\ 1)u_0,\\ v_k&=\alpha(k,\ k)B^k u_0+\alpha(k,\ k-1)B^{k-1}u_0+\cdots+\alpha(k,\ 1)Bu_0. \end{aligned}\right\} \tag{5.66}$$

设

$$\overline{D}_1=\lambda_1 I,\ D_1=\lambda_1 B, \tag{5.67}$$

则(5.59)，(5.60)可改写为

$$b_1=\overline{D}_1 u_0, \tag{5.59'}$$

$$v_1=D_1 u_0, \tag{5.60'}$$

(5.61)，(5.62)可改写为

$$b_2=(\lambda_1 D_1+\lambda_2 I)u_0=\overline{D}_2 u_0, \tag{5.61'}$$

$$v_2=(\lambda_1 BD_1+\lambda_2 B)u_0=D_2 u_0, \tag{5.62'}$$

其中

$$\overline{D}_2=\lambda_1 D_1+\lambda_2 I=\lambda_1 D_1+\lambda_2 D_0\quad(\text{设 } D_0=I \text{ 是单位算子}), \tag{5.68}$$

$$D_2=\lambda_1 BD_1+\lambda_2 BD_0, \tag{5.69}$$

(5.63)，(5.64)可改写为

$$b_3=(\lambda_1 D_2+\lambda_2 D_1+\lambda_3 D_0)u_0=\overline{D}_3 u_0, \tag{5.63'}$$

$$v_3=(\lambda_1 BD_2+\lambda_2 BD_1+\lambda_3 BD_0)u_0=D_3 u_0, \tag{5.64'}$$

其中

$$\overline{D}_3=\lambda_1D_2+\lambda_2D_1+\lambda_3D_0, \tag{5.70}$$

$$D_3=\lambda_1BD_2+\lambda_2BD_1+\lambda_3BD_0. \tag{5.71}$$

一般地,

$$b_k=\overline{D}_ku_0, \tag{5.72}$$

$$v_k=D_ku_0, \tag{5.73}$$

$$D_k=B\overline{D}_k,\ \overline{D}_k=A_0D_k, \tag{5.74}$$

其中 $\overline{D}_k$ 和 D_k 由(5.46)有如下表示:

$$\overline{D}_k=\sum_{s=1}^{k}\lambda_sD_{k-s}-A_1D_{k-n}=\sum_{s=1}^{k}\lambda_sB\overline{D}_{k-s}-A_1B\overline{D}_{k-n}, \tag{5.75}$$

$$D_k=\sum_{s=1}^{k}\lambda_sBD_{k-s}-BA_1D_{k-n}, \tag{5.76}$$

它们都是线性算子,这里

$$\overline{D}_0=A_0,\ D_{n-k}=0(n<k). \tag{5.77}$$

根据 $k<n$ 和 $k\geqslant n$ 两种不同情形, 包含在 b_k, v_k, $\overline{D}_k$ 和 D_k 的项分为两类不同形式, 第一类项不包含算子 A_1, 而第二类项是含有算子 A_1. 从表达式(5.76)看到, D_k 中的每一包含 D_{k-s} 的项都受到 λ_sB 的作用, 因此 D_k 中的第一类项可看为对算子 $I=D_0$ 逐次作用算子 λ_sB 的结果, 它具有以下形式:

$$\lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\cdots\lambda_{s_p}B^p, \tag{5.78}$$

其中 $s_1+s_2+\cdots+s_p=k$. 我们认为,数 λ_s, 算子 D_s, $\overline{D}_s$ 和向量 b_s, v_s 具有"s 阶齐次性",而算子 A_1 有 n 阶齐次性; A_0 和 B 有 0 阶齐次性.

递推公式(5.75)和(5.76)右端的所有项都具有 k 阶齐次性. 若 $s_1+s_2+\cdots+s_p=k$, 则形如(5.78)的项一定出现在 D_k 的表达式中,这些项的和在 D_k 中有以下形式:

$$\alpha(k,\ p)B^p. \tag{5.79}$$

由于 $s_i \geqslant 1$，因此其中的 $p: 1 \leqslant p \leqslant k$. 从而在 D_k 中含有项:

$$\alpha(k, k) B^k = \lambda_1^k B^k. \tag{5.80}$$

这就是 v_k 表达式(5.66)中的第一项算子.

现在来确定 λ_1. 设 x 是 E_0^* 正交补 $\bar{S}+\bar{E}_1$ 中的任意一个向量，则

$$(x, z_0)=0, \ z_0 \in E_0^*. \tag{5.81}$$

因为向量 $u_0, \ u_1=Bu_0, \ \cdots, \ u_{n-2}=B^{n-2}u_0 \in \bar{E}_1$，所以向量

$$B^{k-1}u_0 \quad (k<n)$$

与 z_0 正交:

$$(B^{k-1}u_0, \ z_0)=0 \ (k<n) \tag{5.82}$$

当 $k<n$ 时 $b_k=D_k u_0$ 中所有项都具有

$$\alpha(k, p) B^{p-1} u_0 \quad (1 \leqslant p \leqslant k<n)$$

的形式，因此当 $k<n$ 时

$$b_k \in \bar{S}+\bar{E}_1. \tag{5.83}$$

当 $k=n$ 时，

$$\bar{D}_n=\sum_{s=1}^{n} \lambda_s D_{n-s}-A_1 D_0=\sum_{s=1}^{n} \lambda_s B \bar{D}_{n-s}-A_1,$$

$$D_n=\sum_{s=1}^{n} \lambda_s B D_{n-s}-B A_1 D_0.$$

在这些表达式中开始有了第二类项，即含有算子 A_1 的项. 因而在 b_n 中也有了这样的项，即 $-A_1 u_0$. b_n 中的其余项为 $\alpha(n, n) B^{n-1} u_0=\lambda_1^n B^{n-1} u_0$ 和 $\alpha(n, p) B^{p-1} u_0, \ p \leqslant n-1$. 于是

$$b_n=\bar{D}_n u_0=\alpha(n, n) B^{n-1} u_0-A_1 u_0+\sum_{p=1}^{n-1} \alpha(n, p) B^{p-1} u_0. \tag{5.84}$$

根据(5.82) $\sum_{p=1}^{n-1} \alpha(n, p) B^{p-1} u_0 \in \bar{S}+\bar{E}_1$.

利用可解性条件 $(b_n, z_0)=0$ 和条件(5.51)，我们有

$$\lambda_1^n - (A_1 u_0,\ z_0) = 0. \tag{5.85}$$

假定

$$(A_1 u_0,\ z_0) \neq 0 \quad (条件\ \Gamma), \tag{5.86}$$

并设

$$\bar{c} = (A_1 u_0,\ z_0), \tag{5.87}$$

则

$$\lambda_1 = \sqrt[n]{\bar{c}} \tag{5.88}$$

有 n 个相异的不等于零的根. 我们固定其中的一个, 从而求得

$$b_1 = \lambda_1 v_0 = \lambda_1 u_0,\ v_1 = Bb_1.$$

假定我们已求得 λ_j, b_j 和 v_j $(j \leqslant k)$. 现在来求 λ_{k+1}, b_{k+1} 和 v_{k+1}.

由(5.72)

$$b_{n+k} = \bar{D}_{n+k} u_0. \tag{5.89}$$

设 b_{n+k} 中所有第二类项之和为:

$$Z_k = Y_k u_0. \tag{5.90}$$

可直接验证, Z_k 中的项是由于算子 A_1 和算子 $\lambda_s B$ 对 u_0 作用而形成的, 这里的 A_1 有 n 阶齐次性, 算子 $\lambda_s B$ 有 s 阶齐性. 在此情况下 $\lambda_s B$ 只在 $s \leqslant k$ 时出现, 否则包含在 Z_k 中的相应项的齐次性阶数将大于 $n+k$, 而 b_{n+k} 的齐次性为 $n+k$ 阶, 这是不可能的. 然而, 根据假定, 当 $s \leqslant k$ 时所有 λ_s 是已知的, 因此向量 Z_k 是已知向量. 从而 b_{n+k} 可写为以下形式:

$$\bar{D}_{n+k} u_0 = b_{n+k} = \sum_{p=1}^{n} \alpha(n+k,\ p) B^{p-1} u_0 + Z_k. \tag{5.91}$$

在此表达式中 $\alpha(n+k,\ n-1) B^{n-2} u_0$, $\alpha(n+k,\ n-2) B^{n-3} u_0$, $\cdots$, $\alpha(n+k,\ 1) u_0$ 项都属于 $\bar{S} + \bar{E}_1$, 与向量 z_0 正交. 故由可解性条件 $(b_{n+k},\ z_0) = 0$ 得到

$$0 = (\alpha(n+k,\ n) B^{n-1} u_0,\ z_0) + (Z_k,\ z_0).$$

再由条件(5.51)我们有

$$\alpha(n+k,\ n)=-(Z_k,\ z_0), \tag{5.92}$$

其右端是已知量．由(5.65)

$$\begin{aligned}&\alpha(n+k,\ n)=n\lambda_{k+1}\lambda_1^{n-1}+\alpha_1(n+k,\ n),\\&\alpha_1(n+k,\ n)=\sum_{\substack{s_1+s_2+\cdots+s_n=n+k\\ s_i\leqslant k}}\lambda_{s_1}\lambda_{s_2}\cdots\lambda_{s_n},\end{aligned} \tag{5.93}$$

其中 $\alpha_1(n+k,\ n)$ 是 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$ 的多项式，是已知量．从而由(5.92)求得 λ_{k+1}:（因为 $\lambda_1\neq 0$）

$$\lambda_{k+1}=-\frac{1}{n\lambda_1^{n-1}}[(Z_k,\ z_0)+\alpha_1(n+k,\ n)]. \tag{5.94}$$

由(5.46)

$$b_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j v_{k+1-j}-A_1 v_{k+1-n}$$

（当 $k+1<n$ 时规定最后一项为零）.

因此在求得 λ_{k+1} 以后，根据 λ_j, b_j 和 $v_j(j\leqslant k)$ 都已求得的假定可求得 b_{k+1}, 从而亦可求得 $v_{k+1}=Bb_{k+1}$.

关于级数(5.17)，(5.18)和(5.43)，(5.44)收敛性的证明请参看[2]的附录。

第4章

未提高微分算子阶数的摄动问题

在上一章我们讨论了线代数中的摄动问题，这些问题在偏微分方程摄动问题和偏微分方程奇异摄动问题中可以找到它的相似之处，上一章所讨论的结果可以推广到微分方程上来.

在这一章讨论的偏微分方程的主要特点是，在原来微分算子中加进摄动项以后未提高微分算子的阶数. 例如考虑摄动算子

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1,$$

其中　L_0 是 $2m$ 阶椭圆型算子;

　　L_1 是阶数不高于 $2m$ 的微分算子.

当 $\varepsilon=0$ 时算子 L_ε 退化为算子 L_0, 但阶数并未降低, 方程类型亦未改变, 因此所讨论的微分方程问题和第二章不同. 然而它与线代数方程组摄动问题一样, 也可能有两种情形产生. 第一种情形: 算子 L_0 有逆算子 L_0^{-1}, 即 $\lambda=0$ 不是它的特征值; 第二种情形: $\lambda=0$ 是算子 L_0 的特征值, 在此情况下退化问题未必可解. 在第一种情形里构造摄动问题解的展开式比较简单, 在第二种情形里构造过程要复杂得多.

为简单起见, 我们只讨论二阶椭圆型方程, 但讨论结果可推广到高阶椭圆型方程.

此外, 我们还要讨论边界条件摄动问题.

§1 问题的提法

设 D 是 N 维空间的有界区域，Γ 是其边界．在 $D+\Gamma$ 内给定二阶椭圆型方程：

$$L_0u\equiv\sum_{i,k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{N}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u=h(x) \tag{1.1}$$

和摄动方程：

$$L_\varepsilon u\equiv L_0u+\varepsilon L_1u=h(x), \tag{1.2}$$

其中 L_1 是不高于二阶的微分算子：

$$L_1u\equiv\sum_{i,k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{N}B_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+C(x)u. \tag{1.3}$$

摄动问题 A_ε：在 $D+\Gamma$ 内求 $u=u_\varepsilon(x)$ 满足方程(1.2)和边界条件：

$$\gamma u_\varepsilon\equiv u_\varepsilon|_\Gamma=0. \tag{1.4}$$

退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$：在 $D+\Gamma$ 内求 $u=u_0(x)$ 满足方程(1.1)和边界条件：

$$u_0|_\Gamma=0. \tag{1.5}$$

我们的问题是，摄动问题 A_ε 的解 u_ε 和退化问题 A_0 的解 u_0 有何关系？如何利用退化问题 A_0 的解来构造摄动问题 A_ε 解 u_ε 的展开式？

我们按 $\lambda=0$ 是否是退化问题的特征值这一点分别来进行讨论．

§2 退化问题唯一可解的情形

假定退化问题(1.1)，(1.5)对属于 $L_p(D)$ 的任意一个右

端函数 $h(x)$ 有解并且解是唯一的. 在此情况下我们称**退化问题 A_0 不位于谱上**. 由于退化问题不位于谱上, 当 ε 充分小时(参看[66], [67])摄动问题 A_ε 亦不位于谱上, 即在 $D+\Gamma$ 内有唯一解. 此时可求问题 A_ε 解 u_ε 的展开式如下:

$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \cdots + \varepsilon^n u_n + \cdots \tag{2.1}$$

将它代入方程(1.2)和边界条件(1.4), 比较 ε 的同幂项系数, 我们得到确定 u_0, u_1, $\cdots$, u_n, $\cdots$ 的一系列边值问题:

$$L_0 u_0 = h, \quad \gamma u_0 = 0, \tag{2.2}$$

$$\left.\begin{array}{l} L_0 u_1 = -L_1 u_0, \quad \gamma u_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ L_0 u_n = -L_1 u_{n-1}, \quad \gamma u_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{array}\right\} \tag{2.3$_n$}$$

第一个方程和第一个边界条件就是方程(1.1)和边界条件(1.5), 因此展开式(2.1)的第一项 u_0 就是退化问题的解. 求得 u_0 以后, 问题(2.3$_1$)方程的右端是已知函数, 在边界条件 $\gamma u_1 = 0$ 下解第二个方程, 即得函数 u_1, 如此继之, 可逐次确定函数 $u_i (i=0, 1, \cdots)$.

假定算子 L_0 和 L_1 的系数 a_{ik}, b_i, c_i, A_{ik}, B_i, C_i 在 $D+\Gamma$ 内连续, 而 a_{ik} 和 A_{ik} 在 $D+\Gamma$ 内连续可微, $h \in L_p(D)$. 在这些条件下问题(2.2)的解有如下的估计[68] [69]:

$$\|u\|_{2,p} \leqslant c \|L_0 u\|_{0,p}, \tag{2.4}$$

其中 $\|\ \|_{l,p} = \|\ \|_{W_p^l}$. 由(2.2), (2.3$_n$), 逐次利用估计式(2.4)我们得到

$$\begin{array}{l} \|u_0\|_{2,p} \leqslant c \|h\|_{0,p}, \\ \|u_1\|_{2,p} \leqslant c \|L_1 u_0\|_{0,p} \leqslant ck \|u_0\|_{2,p} \leqslant c^2 k \|h\|_{0,p}, \\ \|u_2\|_{2,p} \leqslant c \|L_1 u_1\|_{0,p} \leqslant ck \|u_1\|_{2,p} \leqslant c^3 k^2 \|h\|_{0,p}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \|u_n\|_{2,p} \leqslant c^{n+1} k^n \|h\|_{0,p}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. \end{array} \tag{2.5}$$

从而由不等式(2.5)推得，级数(2.1)当 $\varepsilon<\frac{1}{ck}$ 时在 $W_p^{(2)}(D)$ 的范数意义下是收敛的，它表示摄动问题 A_ε 解 u_ε 的级数形式.

§3 退化问题位于谱上的情形

3-1 一些假定 假定 $\lambda=0$ 是算子 L_0 在边界条件(1.5)下的特征值，因而退化问题(1.1)，(1.5)未必可解. 在此情况下我们称**退化问题位于谱上**.

为简单起见，我们假定算子 L_0 在边界条件(1.5)下只有一个(除常数因子外)特征函数 u_0 与 $\lambda=0$ 相应：

$$L_0u_0=0,\ \gamma u_0=0. \tag{3.1}$$

众所周知，相应的共轭齐次问题：

$$L_0^*z_0=0,\ \ \gamma z_0=0 \tag{3.2}$$

也只有一个(除常数因子外)特征函数.

如果问题(3.1)有有限个线性无关特征函数，则讨论是类似的(请参看第三章§4).

假定算子 L_1 使摄动问题(1.2)，(1.4)唯一可解，并且对于任意一个满足边界条件(1.4)的光滑函数 u 有下列不等式成立：

$$\varepsilon^m\|u\|_1\leqslant c\|L_\varepsilon u\|, \tag{3.3}$$

其中 $\|\ \ \|=\|\ \ \|_{0,p}$，$\|\ \ \|_1=\|\ \ \|_{2,p}$，$c$ 是与 ε，u 无关的常数. 若 $\|\ \ \|=\|\ \ \|_1=\|\ \ \|_{L_2(D)}$，那末在任何情况下都可假定条件(3.3)成立. 下面我们将给出条件(3.3)成立的充分条件.

3-2 展开式的构造 类似于第三章§4求摄动问题(1.2)，(1.4)的解 u_ε 的展开式为以下的级数形式：

$$u_\varepsilon = \frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon^k} + \frac{c_0\bar{u}_1 + c_1\bar{u}_0}{\varepsilon^{k-1}} + \cdots + \frac{c_0\bar{u}_{k-1} + \cdots + c_{k-1}\bar{u}_0}{\varepsilon}$$
$$+ \varepsilon^0[u_0 + (c_1\bar{u}_{k-1} + \cdots + c_k\bar{u}_0)] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^s[u_s + (c_{s+1}\bar{u}_{k-1} + \cdots + c_{s+k}\bar{u}_0)] + \cdots \tag{3.4}$$
(参看第三章 § 4 级数(4.37)).

下面我们来定出数 k, 系数 $c_i(i=0,\ 1,\ \cdots)$, 函数 $\bar{u}_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ k-1)$ 和 $u_s(s=0,\ 1,\ \cdots)$.

将(3.4)代入方程(1.2)和边界条件(1.4), 我们有

$$\varepsilon^{-k}:\ c_0L_0\bar{u}_0=0,\ \gamma\bar{u}_0=0, \tag{3.5}$$
因此 $\bar{u}_0$ 就是算子 L_0 与 $\lambda=0$ 相应的特征函数 u_0(参看(3.1)). 其次, 当 $k>1$ 时

$$\varepsilon^{-k+1}:\ c_0[L_0\bar{u}_1+L_1\bar{u}_0]=0,\ \gamma\bar{u}_1=0. \tag{3.6}$$

这是一个非齐次方程, 其右端 $-L_1\bar{u}_0$ 是一已知函数. 问题(3.6)可解的充要条件是, 方程的右端 $-L_1\bar{u}_0$ 与共轭齐次问题(3.2)的解 z_0 正交:

$$(L_1\bar{u}_0,\ z_0)=0. \tag{3.7}$$
如果此条件成立, 则问题(3.6)的通解可表示为:

$$\bar{u}_1+c_1\bar{u}_0, \tag{3.8}$$
其中 $\bar{u}_1$ 是问题(3.6)的特解, $c_1\bar{u}_0$ 是相应齐次问题的通解, c_1 是暂时未定的常数.

类似地, 可逐次确定函数 $\bar{u}_j$, $j\leqslant k-1$ 为下面问题的特解:

$$\varepsilon^{-k+j}:\ c_0[L_0\bar{u}_j+L_1\bar{u}_{j-1}]=0,\ \gamma\bar{u}_j=0, \tag{3.9}$$
$$(L_1\bar{u}_{j-1},\ z_0)=0. \tag{3.10}$$

因此, 若条件

$$(L_1\bar{u}_i,\ z_0)=0\quad(i=0,\ 1,\ \cdots,\ k-2) \tag{3.11}$$
成立, 则我们可以逐次解问题:

$$c_0[L_0\bar{u}_i+L_1\bar{u}_{i-1}]=0,\ \gamma\bar{u}_i=0 \tag{3.12$_i$}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1)$$

以求得 $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\cdots$, $\bar{u}_{k-1}$, 这些函数是问题(3.12$_i$)的特解. 问题(3.12$_i$)的通解有如下形式:

$$\bar{u}_i+c_i\bar{u}_0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1), \tag{3.13}$$

对于 u_0 我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon^0\text{:}\ & L_0u_0+c_0L_1\bar{u}_{k-1}+c_1(L_0\bar{u}_{k-1}+L_1\bar{u}_{k-2})+\cdots\\ & +c_{k-1}(L_0\bar{u}_1+L_1\bar{u}_0)+c_kL_0\bar{u}_0=h,\\ & \gamma u_0=0.\end{aligned} \tag{3.14}$$

若已求得 $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, $\cdots$, $\bar{u}_{k-1}$, 则由(3.5)和(3.12$_i$) ($i=1$, 2, $\cdots$, $k-1$), 问题(3.14)可改写为

$$\begin{aligned}& L_0u_0+c_0L_1\bar{u}_{k-1}=h,\\ & \gamma u_0=0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

此问题有解的条件是:

$$(h-c_0L_1\bar{u}_{k-1},\ z_0)=0. \tag{3.16}$$

因此对于任意一个函数 h 由(3.16)可以求得系数 c_0 的充要条件是:

$$(L_1\bar{u}_{k-1},\ z_0)\neq 0. \tag{3.17}$$

设

$$M=(L_1\bar{u}_{k-1},\ z_0), \tag{3.18}$$

则由(3.16)得到

$$c_0=\frac{1}{M}(h,\ z_0). \tag{3.19}$$

求得 c_0 以后, 可以求 u_0 为问题(3.15)的特解, 此问题的通解可表示为

$$u_0+c_k\bar{u}_0. \tag{3.20}$$

$c_k\bar{u}_0$ 是 ε^0 系数中的一项(参看(3.4)), 因此为了使得级

数(3.4)从 s^{-k} 项开始，应有等式(3.11)和不等式(3.17)成立.

如果等式(3.11)和不等式(3.17)成立，则迭代过程得以实现，即可逐次确定系数 c_s 和函数 u_s.

事实上，假定我们已求得函数 $u_j(j\leqslant s-1)$ 和常数 $c_j(j\leqslant s-1)$. 现在来求 c_s 和 u_s. 对于 u_s，我们有：

$$s^s:\ L_0u_s+L_1u_{s-1}+c_sL_1\bar{u}_{k-1}+c_{s-1}(L_0\bar{u}_{k-1}+L_1\bar{u}_{k-2})+\cdots$$
$$+c_{s+k-1}(L_0\bar{u}_1+L_1u_0)+c_{s+k}L_0\bar{v}_0=0,$$
$$\gamma u_s=0.$$

同理，由问题(3.5)和(3.12$_i$)($i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$)上面问题可改写为：

$$\begin{aligned}&L_0u_s+L_1u_{s-1}+c_sL_1\bar{u}_{k-1}=0,\\&\gamma u_s=0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

此问题的可解条件是：

$$(L_1u_{s-1}+c_sL_1\bar{u}_{k-1},\ z_0)=0.\tag{3.22}$$

根据条件(3.17)，由此推得

$$c_s=-\frac{1}{M}(L_1u_{s-1},\ z_0).\tag{3.23}$$

求得 c_s 以后，我们求函数 u_s 作为问题(3.21)的特解. 它的通解是：

$$u_s+c_{k+s}\bar{u}_0.\tag{3.24}$$

级数(3.4)在 $W_p^{(2)}$ 范数意义下的收敛性证明与§2的证明一样，故从略.

在以上构造过程中，我们曾假定等式(3.11)和不等式(3.17)成立. 这就意味着问题(3.12$_i$)对于 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ 是可解的，而问题

$$L_0u+L_1\bar{u}_{k-1}=0,\ \gamma u=0\tag{3.25}$$

是不可解的．因此类似于第三章§4，我们称问题(3.12$_i$)的特解 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_{k-1}$ 是特征函数 $\bar{u}_0$ 关于摄动问题(1.2)，(1.4)的伴随特征函数．函数 $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k-1}$ 形成长度为 k 的 Jordan 链．

现在的问题是，k 应如何，在第 k 步才有不等式(3.17)成立？下面我们要证明，k 不可能超过条件(3.3)中的 m．

3-3 关于数 k 的一个定理 **定理1** 若条件(3.3)成立，则条件(3.11)和(3.17)成立只到 $k\leqslant m$ 为止，因此 Jordan 链的长度为 k，展开式(3.4)从阶为 ε^{-k} 的项开始．

反之，若条件(3.11)和(3.17)成立，则摄动问题(1.2)，(1.4)对于充分小的 ε 可解，并且在边界条件(1.4)下对于算子 L_ε 来说有如下的估计式．

$$\varepsilon^k\|u\|_1\leqslant c\|L_\varepsilon u\|, \tag{3.26}$$

其中 $\|\quad\|=\|\quad\|_{0,p}$，$\|\quad\|_1=\|\quad\|_{2,p}$，$u$ 是满足边界条件(1.4)的任意一个光滑函数 $\left((3.26)\text{意味着}\|L_\varepsilon^{-1}\|\leqslant\dfrac{c}{\varepsilon^k}\right)$．

证明 先证定理的第一部分．假定相反，即条件(3.11)和(3.17)成立直到 $k_1>m$ 为止．此时我们可以构造函数 $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k_1-1}$，它们满足下面的方程和边界条件：

$$\begin{aligned}&L_0\bar{u}_j+L_1\bar{u}_{j-1}=0 \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1-1),\\&\gamma\bar{u}_j=0 \quad (j=0,\ 1,\ \cdots,\ k_1-1)\\&\qquad\qquad (\text{规定：}\ \bar{u}_{-1}=0).\end{aligned} \tag{3.27}$$

令

$$\tilde{u}_\varepsilon=\frac{\bar{u}_0}{\varepsilon^{k_1}}+\frac{\bar{u}_1+\bar{u}_0}{\varepsilon^{k_1-1}}+\cdots+\frac{\bar{u}_{k_1-1}+\cdots+\bar{u}_0}{\varepsilon}, \tag{3.28}$$

则

$$L_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon=(L_0+\varepsilon L_1)\left(\frac{\bar{u}_0}{\varepsilon^{k_1}}+\frac{\bar{u}_1+\bar{u}_0}{\varepsilon^{k_1-1}}+\cdots+\frac{\bar{u}_{k_1-1}+\cdots+\bar{u}_0}{\varepsilon}\right)$$

$$=\frac{L_0\bar{u}_0}{\varepsilon^{k_1}}+\frac{L_0\bar{u}_1+L_1\bar{u}_0}{\varepsilon^{k_1-1}}+\cdots+L_1(\bar{u}_{k_1-1}+\cdots+\bar{u}_0)$$

$$=L_1(\bar{u}_{k_1-1}+\cdots+\bar{u}_0). \tag{3.29}$$

此式右端与 ε 无关，因此

$$\|L_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon\|=O(1). \tag{3.30}$$

另一方面，根据条件(3.3)应有

$$\varepsilon^m\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1\leqslant c\|L_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon\|. \tag{3.31}$$

因为函数 $\bar{u}_0$, $\bar{u}_1$, $\cdots$, $\bar{u}_{k_1-1}$ 固定，所以对于充分小的 ε 我们有

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1=\frac{1}{\varepsilon^{k_1}}\|(1+\varepsilon+\cdots+\varepsilon^{k_1-1})\bar{u}_0+\varepsilon(1+\cdots+\varepsilon^{k_1-2})\bar{u}_1+\cdots$$

$$+\varepsilon^{k_1-2}(1+\varepsilon)\bar{u}_{k_1-2}+\varepsilon^{k_1-1}\bar{u}_{k_1-1}\|_1\geqslant\frac{1}{2\varepsilon^{k_1}}\|\bar{u}_0\|_1. \tag{3.32}$$

从而由(3.31)和(3.30)推得

$$cO(1)=c\|L_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon\|\geqslant\varepsilon^m\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1\geqslant\frac{\varepsilon^m}{2\varepsilon^{k_1}}\|\bar{u}_0\|_1. \tag{3.33}$$

因为 $k_1>m$，这是不可能的．于是证得 k_1 不可能大于 m.

再证定理的第二部分．若条件(3.11)和(3.17)成立，则对于任意右端函数 $h(x)$ 迭代过程可无限通过，因而可逐次确定级数(3.4)中的项．和我们在§2所证明的一样，此级数在 $W_p^{(2)}$ 内收敛，因而它表示摄动问题(1.2)，(1.4)的解 u_ε，并且解是唯一的(因为问题(1.2)，(1.4)对任意右端 $h(x)\in L_p$ 可解)．此外，和第三章§4一样，可以对级数(3.4)的所有项进行估计(参看第三章§4(4.59)～(4.61))，最后得到

$$\varepsilon^k\|u_\varepsilon\|_{2,p}\leqslant c\|h\|_{0,p}=c\|L_\varepsilon u_\varepsilon\|_{0,p}. \tag{3.34}$$

于是定理1得证．

从这定理的两个部分推得，在条件(3.3)中可设 $m=k$.

这里的 k 就是特征函数 u_0 和伴随特征函数 $\bar{u}_i$ $(i=1, 2, \cdots k-1)$ Jordan 链的长度. 若特征函数有若干个, 对于每一个特征函数都有一个 Jordan 链, 则 m 取为所有 Jordan 链的最大长度.

3.4 条件(3.3)成立的一个充分条件($m=1$)

定理 2 假定算子 L_0 对于任意一个满足边界条件 $\gamma u=0$ 的光滑函数 u 是正算子:

$$(L_0 u, u) \geqslant 0, \tag{3.35}$$

并且与 $\lambda=0$ 相应的特征函数只有一个, 此外, 假定算子 L_1 满足下列关系:

$$\|u\|_1^2=(L_1 u, u) \geqslant \gamma^2\|u\|_{0,2}^2, \tag{3.36}$$

则

$$\varepsilon\|u\|_1 \leqslant c\|L_\varepsilon u\|, \tag{3.37}$$

其中 c 是与 ε, u 无关的常数.

证明 由(3.35), 我们有

$$(L_\varepsilon u, u)=(L_0 u, u)+\varepsilon(L_1 u, u) \geqslant \varepsilon(L_1 u, u). \tag{3.38}$$

利用内积不等式

$$|(L_\varepsilon u, u)| \leqslant \frac{A}{\varepsilon}\|L_\varepsilon u\|^2+B\varepsilon\|u\|^2 \tag{3.39}$$

和条件(3.36)得到

$$\begin{aligned}\frac{A}{\varepsilon}\|L_\varepsilon u\|^2+B\varepsilon\|u\|^2 &\geqslant (L_\varepsilon u, u) \geqslant \varepsilon(L_1 u, u)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\varepsilon\gamma^2\|u\|^2+\frac{1}{2}\varepsilon(L_1 u, u),\end{aligned} \tag{3.40}$$

其中 $\|\ \|=\|\ \|_{0,2}$, A, B 是与 ε, u 无关的常数.

取 $B \leqslant \frac{1}{2}\gamma^2$, 从而推得

$$\frac{A}{\varepsilon}\|L_\varepsilon u\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon(L_1 u, u)=\frac{1}{2}\varepsilon\|u\|_1^2,$$

因此，$$\varepsilon\|u\|_1\leqslant c\|L_\varepsilon u\|.$$

于是定理 2 得证.

在 $m=1$ 的情况下展开式(3.4)从 $\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}$ 这一项开始，没有伴随函数与 u_0 相应.

§4 边界条件的摄动

在这一节我们讨论边界条件有摄动，而微分算子没有摄动的偏微分方程摄动问题.

4-1 问题的提法 设 D 是 N 维空间的有界区域，Γ 是其边界. 在 $D+\Gamma$ 内给定二阶椭圆型方程

$$L_0u\equiv\sum_{i,k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{N}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=h(x),\ x\in D \tag{4.1}$$

和边界条件

$$\gamma_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon B(s)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}+A(s)u_\varepsilon=\varphi(s),\ s\in\Gamma, \tag{4.2}$$

其中 $\frac{\partial}{\partial\nu}=\sum_{i,k}a_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}\cos(n,\ x_k)$，$A(s)\neq0$，$\varepsilon B(s)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}$ 是摄动项.

设 $\delta_0u_\varepsilon\equiv A(s)u_\varepsilon$，$\delta_1u_\varepsilon\equiv B(s)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}$，则(4.2)可改为

$$\gamma_\varepsilon u_\varepsilon\equiv\varepsilon\delta_1u_\varepsilon+\delta_0u_\varepsilon=\varphi. \tag{4.2'}$$

摄动问题 A_ε：在 $D+\Gamma$ 内求 $u=u_\varepsilon(x)$ 满足方程(4.1)和边界条件(4.2).

退化问题 $A_0(\varepsilon=0)$：在 $D+\Gamma$ 内求函数 u 满足方程(4.1)和边界条件：

$$\gamma_0 u \equiv \delta_0 u \equiv A(s)u = \varphi(s), \ s \in \Gamma \qquad (4.3)$$
$$(A(s) \neq 0).$$

我们假定. 1) 问题 A_0 位于谱上，相应的齐次问题只有(为简单起见)一个特征函数 $\bar{u}_0$:

$$L_0 \bar{u}_0 = 0, \ \gamma_0 \bar{u}_0 = 0; \qquad (4.4)$$

2) 摄动问题(4.1), (4.2)对于任意充分小的 ε 有解并且解是唯一的;

3) 对于摄动问题来说有类似于(3.3)的估计式:

$$\varepsilon^m \|u\|_1 \leqslant c(\|L_0 u\| + \|\gamma_\varepsilon u\|_2), \qquad (4.5)$$

其中 u 是任意一个满足边界条件(4.2)的光滑函数, $\| \ \| = \| \ \|_{0,p}$, $\| \ \|_1 = \| \ \|_{2,p}$, $\| \ \|_2 = \| \ \|_{W_p^s(\Gamma)}$ (一般说, s 不是整数, 请参看[70], [66], [67]).

4-2 展开式的构造 和§3一样, 求摄动问题 A_ε 的解 u_ε 为以下的级数形式:

$$u_\varepsilon = \frac{c_0 \bar{u}_0}{\varepsilon^k} + \frac{c_0 \bar{u}_1 + c_1 \bar{u}_0}{\varepsilon^{k-1}} + \cdots + \frac{c_0 \bar{u}_{k-1} + \cdots + c_{k-1} \bar{u}_0}{\varepsilon}$$
$$+ \varepsilon^0 [u_0 + (c_1 \bar{u}_{k-1} + \cdots + c_k \bar{u}_0)] + \cdots$$
$$+ \varepsilon^s [u_s + (c_{s+1} \bar{u}_{k-1} + \cdots + c_{s+k} \bar{u}_0)] + \cdots. \qquad (4.6)$$

将它代入方程(4.1)和边界条件(4.2), 比较 ε 的同幂项系数, 我们得到确定 $\bar{u}_j$ 的一系列边值问题:

$$L_0 \bar{u}_0 = 0, \ \delta_0 \bar{u}_0 \equiv A(s) \bar{u}_0(s) = 0, \qquad (4.7_0)$$

$$L_0 \bar{u}_1 = 0, \ \delta_0 \bar{u}_1 + \delta_1 \bar{u}_0 \equiv A(s) \bar{u}_1 + B(s) \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \nu} = 0, \ (4.7_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$L_0 \bar{u}_{k-1} = 0, \ \delta_0 \bar{u}_{k-1} + \delta_1 \bar{u}_{k-2} \equiv A(s) \bar{u}_{k-1} + B(s) \frac{\partial \bar{u}_{k-2}}{\partial \nu} = 0.$$
$$(4.7_{k-1})$$

由此可知, 展开式(4.6)中的第一项 $\bar{u}_0$ 就是问题(4.4)的特

征函数.

设 z_0 是问题(4.4)共轭齐次问题:

$$L_0^* z=0, \ \gamma_0 z=0 \tag{4.8}$$

的特征函数, z_0 除常数因子外也是唯一的.

由格林公式

$$(L_0\bar{u}_1, \ z_0)-(\bar{u}_1, \ L_0^* z_0)=\int_\Gamma\left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\nu}z_0-\bar{u}_1\frac{\partial z_0}{\partial\nu}\right)d\Gamma$$

$$+\int_\Gamma\sum b_i\cos(nx_i)\bar{u}_1 z_0\,d\Gamma \tag{4.9}$$

推得正交条件:

$$0=-\int_\Gamma\bar{u}_1\frac{\partial z_0}{\partial\nu}d\Gamma=\int_\Gamma\frac{B(s)}{A(s)}\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\nu}\frac{\partial z_0}{\partial\nu}d\Gamma, \tag{4.10}$$

这是问题(4.7_1)关于 $\bar{u}_1$ 可解的充要条件. 如果此条件成立, 我们可以求出 $\bar{u}_1$ 作为问题(4.7_1)的特解.

同理, 对于第 i 个问题(4.7_{i-1})我们有正交条件:

$$0=-\int_\Gamma\bar{u}_{i-1}\frac{\partial z_0}{\partial\nu}d\Gamma=\int_\Gamma\frac{B(s)}{A(s)}\frac{\partial\bar{u}_{i-2}}{\partial\nu}\frac{\partial z_0}{\partial\nu}d\Gamma, \tag{4.11}$$

其中 $\bar{u}_{i-2}$ 是在前面第 $i-1$ 步已定出的函数. 条件(4.11)是问题(4.7_{i-1})关于 $\bar{u}_{i-1}$ 可解的充要条件. 如果此条件成立, 我们可定出 $\bar{u}_{i-1}$ 作为问题(4.7_{i-1})的特解.

如条件(4.11)对于 $i=2, 3, \cdots, k$ 都成立, 则可全部定出 $\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k-1}$.

假定已定出函数 $\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k-1}$.

现在来定 u_0. 由展开式(4.6), 方程(4.1)和边界条件(4.2), 我们有

$$L_0 u_0=h,$$

$$\delta_0 u_0 + c_0 \delta_1 \bar{u}_{k-1} \equiv A(s) u_0 + c_0 B(s) \frac{\partial u_{k-1}}{\partial \nu} = \varphi. \qquad (4.12)$$

此问题可解的条件是:

$$(h, z_0) = -\int_\Gamma u_0 \frac{\partial z_0}{\partial \nu} d\Gamma = c_0 \int_\Gamma \frac{B(s)}{A(s)} \frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial \nu} \frac{\partial z_0}{\partial \nu} d\Gamma$$

$$-\int_\Gamma \frac{1}{A(s)} \varphi(s) \frac{\partial z_0}{\partial \nu} d\Gamma. \qquad (4.13)$$

这一条件也是利用格林公式(4.9)得到的, 只须在公式中将 $\bar{u}_1$ 换为 u_0 并利用 u_0 的边界条件即可. 因此对于任意 φ 和 h 可求得系数 c_0 使(4.13)成立的充要条件是: c_0 后面的线积分不能为零, 即

$$\int_\Gamma \frac{B(s)}{A(s)} \frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial \nu} \frac{\partial z_0}{\partial \nu} d\Gamma \neq 0. \qquad (4.14)$$

这样,我们得到类似于(4.11)的条件,但此时不等于零. 这就意味着函数 $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k-1}$ 组成长度为 k 的 Jordan 链: 这些函数是问题$(4.7_0)\sim(4.7_{k-1})$的解,而第 $k+1$ 个问题:

$$L_0 \bar{u}_k = 0, \ \delta_0 \bar{u}_k + \delta_1 \bar{u}_{k-1} \equiv A(s) \bar{u}_k + B(s) \frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial \nu} = 0 \qquad (4.15)$$

已不可解. 因此,我们称函数 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_{k-1}$ 是特征函数 $\bar{u}_0$ 关于边值问题(4.1), (4.2)的伴随特征函数.

如果条件(4.14)成立, 则由(4.13)求得系数 c_0, 然后求 u_0 作为问题(4.12)的特解.

假定已求出 c_i 和 $u_i(i \leqslant s-1)$. 现在来求 c_s 和 u_s. 当展开式(4.6)代入方程(4.1)和边界条件(4.2)以后, ε^s 的系数分别为:

$$L_0 u_s = 0 \qquad (4.16)$$

和

$$\delta_1 u_{s-1}+c_s\delta_1\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{s+k-1}\delta_1\bar{u}_0$$
$$+\delta_0 u_s+c_{s+1}\delta_0\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{s+k}\delta_0\bar{u}_0$$
$$=A(s)u_s+c_{s+1}A(s)\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{s+k}A(s)\bar{u}_0$$
$$+B(s)\frac{\partial u_{s-1}}{\partial\nu}+c_sB(s)\frac{\partial\bar{u}_{k-1}}{\partial\nu}+\cdots$$
$$+c_{s+k-1}B(s)\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\nu}=0.$$

再由$(4.7_0)\sim(4.7_{k-1})$的边界条件可进一步化简为:

$$A(s)u_s+B(s)\frac{\partial u_{s-1}}{\partial\nu}+c_sB(s)\frac{\partial\bar{u}_{k-1}}{\partial\nu}=0. \tag{4.17}$$

由格林公式(4.9),我们有

$$\int_\Gamma\frac{B(s)}{A(s)}\frac{\partial u_{s-1}}{\partial\nu}\frac{\partial z_0}{\partial\nu}d\Gamma$$
$$+c_s\int_\Gamma\frac{B(s)}{A(s)}\frac{\partial\bar{u}_{k-1}}{\partial\nu}\frac{\partial z_0}{\partial\nu}d\Gamma=0. \tag{4.18}$$

这是问题(4.16), (4.17)可解的充要条件. 根据假定, c_i, u $(i\leqslant s-1)$已求得,因此按条件(4.14),由(4.18)可求得 c_s, 再求 u_s 作为问题(4.16), (4.17)的特解. 从而迭代过程得以完全实现.

4-3 关于数 k 的一个定理 和§3一样,关于展开式(4.6)中的 k 亦有类似的定理.

定理 3 若条件(4.5)成立,则条件(4.11)和(4.14)成立只到 $k\leqslant m$ 为止, 因此 Jordan 链的长度为 k, 展开式(4.6)从阶为 ε^{-k} 的项开始;

若边界条件(4.2)换为

$$\gamma_s u\equiv A(s)\frac{\partial u}{\partial\nu}+\varepsilon B(s)u=\varphi, \tag{4.19}$$

则在类似于(4.11)和(4.14)条件下, 摄动问题(4.1), (4.19)对于充分小 ε 可解,并且在边界条件(4.19)下对于算子 L_0 来

说有如下的估计式:

$$\varepsilon^k\|u\|_1\leqslant c(\|L_\varepsilon u\|+\|\gamma_\varepsilon u\|_2), \tag{4.20}$$

其中 u 是任意一个满足边界条件(4.19)的光滑函数，$\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ 的意义同前(参看(4.5)).

定理 3 的证明与定理 1 类似. 事实上按 Слободенский[71] 定理推得，形如

$$L_0u_i=0,\quad A(s)\frac{\partial u_i}{\partial\nu}\bigg|_\Gamma=-B(s)u_{i-1}|_\Gamma,\ A(s)\neq 0$$

的齐次问题的解 u_i 属于空间 $W_2^{(2)}$. 因而在我们所讨论的情况下逐次近似 u_i 的光滑度保持不变，所以级数(4.6)在 $W_2^{(2)}$ 内收敛. 一般地说，在边界条件(4.2)下级数(4.6)是一渐近级数，求出其有限项之和，再估计其余项. 设

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n=&\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{u}_1+c_1\bar{u}_0}{\varepsilon^{k-1}}+\cdots+\frac{c_0\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{u}_0}{\varepsilon}\\&+\varepsilon^0[u_0+(c_1\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{u}_0)]+\cdots\\&+\varepsilon^n[u_n+(c_{n+1}\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{n+k}\bar{u}_0)],\end{aligned}$$

则

$$\|u_\varepsilon-\tilde{u}_n\|_1\leqslant c\varepsilon^{n+1},$$

其中 u_ε 是摄动问题(4.1), (4.2)的解.

注 若退化问题的齐次问题(4.4)有有限个特征函数 $\bar{u}_{i0}(i=1,\cdots,r)$，并且有伴随特征函数链 $u_{i1},\cdots,u_{i,k_i-1}$ 与每一个 $\bar{u}_{i0}$ 相对应，则展开式的形式与第三章 § 4(4.63)相似，在条件(4.20)中的 k 应为: $k=\max k_i$.

第 5 章

偏微分方程奇异摄动问题

（退化问题位于谱上）

在第二章我们曾讨论过偏微分方程奇异摄动问题，假定退化问题是唯一可解的，即退化问题没有零特征值. 在此情况下，正如我们在第三章所指出的，摄动算子的阶数一般地高于非摄动算子，或者，虽然它们的阶数相同但类型不同，奇异摄动问题的解 u_ε，作为 ε 的函数，在 $\varepsilon=0$ 具有分析奇点. 在这一章讨论的奇异摄动问题的主要特点是，退化问题位于谱上，此时摄动问题的解 u_ε，作为 ε 的函数，在 $\varepsilon=0$ 不但具有由于方程降阶，或者方程类型改变失去部分边界条件所引起的分析奇点，而且还有由于退化问题位于谱上所引起的代数奇点. 因此构造这类奇异摄动问题解的展开式要顾及到这两个方面，构造过程要复杂得多，在展开式中将出现特征函数、伴随特征函数和伴随边界层函数.

§1 问题的提法

设 D 是 N 维空间有界区域，Γ 是其边界. 在 $D+\Gamma$ 内给定微分算子 L_0, L_1, L_2:

$$L_0\equiv\sum_{i,k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{N}b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x), \quad (1.1)$$

$$L_2\equiv\sum_{1<i_s<N}\frac{\partial^2}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}\left(a_{i_1i_2i_3i_4}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_{i_3}\partial x_{i_4}}\right)+\cdots, \quad (1.2)$$

L_0是二阶椭圆型算子，L_2是四阶椭圆型算子，L_1是不高于三阶的偏微分算子.

摄动问题 A_ε：在 $D+\Gamma$ 内解四阶椭圆型方程第一边值问题：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 L_2 u_\varepsilon + \varepsilon L_1 u_\varepsilon + L_0 u_\varepsilon = h(x), \tag{1.3}$$

$$\gamma_0 u_\varepsilon \equiv u_\varepsilon|_\Gamma = 0, \tag{1.4}$$

$$\gamma_1 u_\varepsilon \equiv \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \rho}\right|_\Gamma = 0. \tag{1.5}$$

退化问题 A_0：在 $D+\Gamma$ 内解二阶椭圆型方程第一边值问题：

$$L_0 u = h, \tag{1.6}$$

$$\gamma_0 u = u|_\Gamma = 0. \tag{1.7}$$

我们假定，退化问题(1.6)、(1.7)位于谱上，即算子 L_0 在齐次边界条件(1.7)下有零特征值，并且与(1.6)，(1.7)相应的齐次问题有一个非零解(特征函数)$\bar{u}_0$：

$$L_0 \bar{u}_0 = 0, \quad \gamma_0 \bar{u}_0 = 0. \tag{1.8}$$

假定，摄动问题 A_ε 对于任意充分小的 ε 和任意右端函数 $h(x)$ 有解存在，并且解是唯一的；此外，对于算子 L_ε 有如下的估计：

$$\varepsilon^m \|u\|_1 \leqslant C \|L_\varepsilon u\|, \tag{1.9}$$

其中 $\|\ \|_1 = \|\ \|_{l,p}$，$\|\ \| = \|\ \|_{0,p}$，u 是满足边界条件(1.4)，(1.5)的任意一个光滑函数.

注 1 若问题(1.8)有有限个特征函数，则摄动问题 A_ε 解的渐近式的构造可参看第三章 § 4 和第四章 § 3.

注 2 下面的讨论可直接推广到 L_0 是 $2k$ 阶椭圆型算子，L_2 是 $2(k+l)$ 阶椭圆型算子的情形.

§2 无伴随函数的情形

2-1 L_ε 的第二次分解 我们所讨论的摄动方程(1.3)是四阶椭圆型方程，退化方程(1.6)是二阶椭圆型方程，当 $\varepsilon=0$ 时方程(1.3)退化为方程(1.6)，方程阶数降低二阶，从而由摄动问题 A_ε 退化为问题 A_0 时将失去一个边界条件(1.5)．为了构造 u_ε 的渐近式，必须对算子 L_ε 在边界 Γ 附近作第二次分解，因此有

$$L_\varepsilon v \equiv \varepsilon^{-2}[M_0 v+\varepsilon M_1 v+\varepsilon^2 M_2 v+\cdots], \tag{2.1}$$

其中

$$M_0 v \equiv a_4(\varphi)\frac{\partial^4 v}{\partial t^4}+a_3(\varphi)\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}+a_2(\varphi)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{2.2}$$

$$t=\rho/\varepsilon.$$

我们要求算子 M_0 的特征多项式 $p_0(\lambda)$ 有一个具有负的实部的根 $-\lambda(\varphi)$：

$$p_0(-\lambda(\varphi))=0,\quad \mathrm{Re}(-\lambda(\varphi))<0. \tag{2.3}$$

在此情况下按第二章的代数条件退化是正则的．

2-2 展开式的构造 现在我们只讨论齐次问题(1.8)有一个特征函数 $\bar{u}_0$，但无伴随特征函数的情形，类似于第三章§4，我们求摄动问题 A_ε 解 u_ε 的展开式为以下形式（参看(4.24)）：

$$u_\varepsilon=\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon^n(u_n+c_{n+1}\bar{u}_0)+\cdots+$$
$$+\varepsilon\left[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\cdots+\varepsilon^n(v_n+c_{n+1}\bar{v}_0)+\cdots\right], \tag{2.4}$$

其中 v_i, $\bar{v}_0$ 是边界层类型函数．

现在来定出系数 c_i 和函数 u_i, $\bar{u}_0$, v_i, $\bar{v}_0$. 为此，将表达式(2.4)代入方程(1.3)和边界条件(1.4)，(1.5)：

$$L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv (L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2 L_2)$$

$$\times\left[\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon^n(u_n+c_{n+1}\bar{u}_0)+\cdots\right]$$

$$+\varepsilon^{-2}(M_0+\varepsilon M_1+\cdots)$$

$$\times\varepsilon\left[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\cdots\right]=h, \tag{2.5}$$

$$\gamma_0 u_\varepsilon \equiv \gamma_0\left\{\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon}+(u_0+c_1\bar{u}_0)+\cdots+\varepsilon\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon}+(v_0+c_1\bar{v}_0)+\cdots\right]\right\}=0, \tag{2.6}$$

$$\gamma_1 u_\varepsilon \equiv \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\rho}\right|_\Gamma=\frac{c_0\left.\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\rho}\right|_\Gamma}{\varepsilon}+\left(\left.\frac{\partial u_0}{\partial\rho}\right|_\Gamma+c_1\left.\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\rho}\right|_\Gamma\right)$$

$$+\cdots+\varepsilon^n\left(\left.\frac{\partial u_n}{\partial\rho}\right|_\Gamma+c_{n+1}\left.\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\rho}\right|_\Gamma\right)$$

$$+\cdots+\frac{c_0\left.\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial t}\right|_\Gamma}{\varepsilon}+\left(\left.\frac{\partial v_0}{\partial t}\right|_\Gamma+c_1\left.\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial t}\right|_\Gamma\right)$$

$$+\cdots+\varepsilon^n\left(\left.\frac{\partial v_n}{\partial t}\right|_\Gamma+c_{n+1}\left.\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial t}\right|_\Gamma\right)+\cdots=0. \tag{2.7}$$

在表达式(2.4)中有两类函数：u_i, $\bar{u}_0$ 和 v_i, $\bar{v}_0$. 第一类函数与 ε 无关，第二类函数是边界层函数. 在代入方程(1.3)和边界条件时，我们将算子 L_ε 的原来分解(1.3)作用在第一类函数上，将算子 L_ε 的第二次分解(2.1)作用在边界层函数上. 在方程(2.5)中分别就这两类函数比较 ε^k 的系数. 由

(2.5)和(2.6)我们有

ε^{-1}: $$L_0 \bar{u}_0 = 0,\ \gamma_0 \bar{u}_0 \equiv \bar{u}_0 |_\Gamma = 0. \tag{2.8}$$

因此，$\bar{u}_0$ 就是齐次问题(1.8)的特征函数.

再由(2.5)的 ε^{-2} 的第一类函数，(2.7)的 ε^{-1} 的系数得到确定第一个边界层函数的方程和边界条件：

$$M_0 \bar{v}_0 = 0, \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho}\right)\bigg|_\Gamma = 0, \tag{2.10}$$

其中 $\bar{u}_0$ 是由(2.8)已确定的函数. 由(2.2)，(2.3)我们得到问题(2.9)，(2.10)的解 $\bar{v}_0$:

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{\lambda(\varphi)} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho}\bigg|_\Gamma \cdot e^{-\lambda(\varphi)t} = A_0(\varphi) e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}, \tag{2.11}$$

其中 $A_0(\varphi) = \frac{1}{\lambda(\varphi)} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho}\bigg|_\Gamma$. 显然，(2.11)是边界层类型函数.

在(2.5)中令 ε^0 的第一类函数项以及(2.6)中 ε^0 的系数为零，则得到确定函数 u_0 的边值问题：

ε^0: $$L_0 u_0 = -c_0 L_1 \bar{u}_0 + h, \tag{2.12}$$

$$\gamma_0(u_0 + c_1 \bar{u}_0 + c_0 \bar{v}_0) = \gamma_0(u_0 + c_0 \bar{v}_0) = 0,$$

或(由(2.11))

$$u_0|_\Gamma = -\frac{c_0}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho}\bigg|_\Gamma. \tag{2.13}$$

类似第四章§4，由格林公式

$$(L_0 u_0,\ z_0) - (u_0,\ L_0^* z_0)$$
$$= \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_0}{\partial \rho} z_0 - u_0 \frac{\partial z_0}{\partial \rho}\right) d\Gamma + \int_\Gamma \sum b_i \cos(nx_i) u_0 z_0 d\Gamma \tag{2.14}$$

推得问题(2.12)，(2.13)的可解条件是：

$$(h-c_0 L_1 \bar{v}_0,\ z_0)$$
$$=-\int_\Gamma u_0 \frac{\partial z_0}{\partial\rho} d\Gamma = c_0 \int_\Gamma \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial\rho} \frac{\partial z_0}{\partial\rho} d\Gamma, \tag{2.15}$$

其中 z_0 是问题(1.8)共轭齐次问题

$$L_0^* z_0 = 0, \qquad \gamma_0 z_0 = 0 \tag{2.16}$$

的解。

由(2.15)可知，对于任意函数 h 可求得系数 c_0 使(2.15)成立的充要条件是：c_0 的系数

$$M=(L_1\bar{v}_0,\ z_0)+\int_\Gamma \frac{1}{\lambda(\varphi)} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial\rho} \frac{\partial z_0}{\partial\rho} d\Gamma \neq 0. \tag{2.17}$$

若条件(2.17)成立，则迭代过程可无限延续，而且它保证特征函数 $\bar{u}_0$ 关于摄动问题 A_ε 没有伴随特征函数(关于伴随特征函数的定义在下面给出)。因此，若条件(2.17)成立，则由(2.15)求得 c_0：

$$c_0=\frac{1}{M}(h,\ z_0). \tag{2.18}$$

然后求 u_0 作为问题(2.12)，(2.13)的特解，我们要求它满足附加条件：

$$(u_0,\ \bar{u}_0)=0. \tag{2.19}$$

在(2.5)中令 ε^{-1} 的边界层系数以及(2.7)中 ε^0 的系数为零，则得到确定 v_0 的边值问题：

$$M_0 v_0 = -c_0 M_1 \bar{v}_0, \tag{2.20}$$

$$\left.\frac{\partial v_0}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial u_0}{\partial\rho}\right|_\Gamma \tag{2.21}$$

$\left(由(2.10), \left.\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial\rho}\right|_\Gamma + \left.\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t}\right|_{t=0} = 0\right)$，其中 $\bar{v}_0$，u_0，c_0 先前都已确定。方程(2.20)右端的 $M_1\bar{v}_0$ 有以下形式：

$$M_1\bar{v}_0=(\bar{A}_0(\varphi)+t\bar{B}_0(\varphi))e^{-\lambda(\varphi)t} \tag{2.22}$$

(算子 M_1 的形式请参看第二章). 利用常数变易法可求得问题(2.20), (2.21)如下形式的解:

$$v_0=D(\varphi)e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}+\frac{\rho}{\varepsilon}\left(\tilde{A}_0(\varphi)+\frac{\rho}{\varepsilon}\tilde{B}_0(\varphi)\right)e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}. \tag{2.23}$$

因此, 我们依次解问题(2.8), (2.9), (2.10)和(2.12), (2.13)即能求得 $\bar{v}_0$, $\bar{v}_0$ 和 u_0, 并且在条件(2.17)下求得系数 c_0.

假定我们已求得系数 c_i 和函数 $u_i, v_i(i\leqslant n-1)$, 现在来求 c_n 和 u_n, v_n.

在(2.5)中令 ε^n 的第一类函数项为零, 在(2.6)中令 ε^n 的系数为零, 并利用(2.8), 则得到确定 u_n 的方程和边界条件:

$$L_0u_n=-L_1(u_{n-1}+c_n\bar{u}_0)-L_2(u_{n-2}+c_{n-1}\bar{u}_0), \tag{2.24}$$

$$\gamma_0u_n=-\gamma_0(v_{n-1}+c_n\bar{v}_0). \tag{2.25}$$

同理, 由格林公式(2.14), 在其中将 u_0 换为 u_n, L_0u 换为 L_0u_n, 则得到问题(2.24), (2.25)的可解性条件:

$$\begin{aligned}&-(L_1(u_{n-1}+c_n\bar{u}_0)+L_2(u_{n-2}+c_{n-1}\bar{u}_0),\ z_0)\\&=-\int_\Gamma u_n\frac{\partial z_0}{\partial\rho}d\Gamma\\&=\int_\Gamma v_{n-1}\frac{\partial z_0}{\partial\rho}d\Gamma+c_n\int_\Gamma\frac{1}{\lambda(\varphi)}\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\rho}\frac{\partial z_0}{\partial\rho}d\Gamma.\end{aligned} \tag{2.26}$$

由条件(2.26)和(2.17)求得 c_n:

$$\begin{aligned}c_n=\frac{-1}{M}\Big[&(L_1u_{n-1}+L_2u_{n-2}+c_{n-1}L_2\bar{u}_0,\ z_0\ )\\&+\int_\Gamma v_{n-1}\frac{\partial z_0}{\partial\rho}d\Gamma\Big].\end{aligned} \tag{2.27}$$

再求 u_n 作为问题(2.24)，(2.25)的特解，要求它满足附加条件

$$(u_n,\ \bar{u}_0)=0. \tag{2.28}$$

在(2.5)中令 ε^{n-1} 的边界层系数为零，在(2.7)中令 ε^n 的系数为零，则得到确定 v_n 的方程和边界条件:

$$\begin{aligned} M_0 v_n = & -M_1(v_{n-1}+c_n\bar{v}_0)-\cdots-M_n(v_0+c_1\bar{v}_0) \\ & -M_{n+1}(c_0\bar{v}_0), \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\left.\frac{\partial v_n}{\partial t}\right|_{t=0}=-\left.\frac{\partial u_n}{\partial\rho}\right|_{\Gamma}. \tag{2.30}$$

从而求得 v_n:

$$v_n=p_n(t,\ \varphi)e^{-\lambda(\varphi)t}=p_n\left(\frac{\rho}{\varepsilon},\ \varphi\right)e^{-\lambda(\varphi)\frac{\rho}{\varepsilon}}, \tag{2.31}$$

其中 $p_n(t,\ \varphi)$是 t 的多项式，所以 v_n 是边界层类型函数.

因此，若摄动问题 A_ε 的参数(方程系数，右端函数，区域边界)充分光滑，则迭代过程可无限延续.

关于余项估计以及条件(1.9)中的 m 和展开式(2.4)之间的关系我们将在下面一般情形里一道进行讨论.

§3 具有伴随函数的情形

3-1 展开式的构造 假定条件(2.17)不成立，在此情况下求摄动问题 A_ε 的解 u_ε 的展开式为以下形式:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon = & \frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{u}_1+c_1\bar{u}_0}{\varepsilon^{k-1}}+\cdots+\frac{c_0\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{u}_0}{\varepsilon} \\ & +[u_0+(c_1\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{u}_0)]+\cdots \\ & +\varepsilon^s[u_s+(c_{s+1}\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k+s}\bar{u}_0)] \\ & +\cdots+\varepsilon\left\{\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{v}_1+c_1\bar{v}_0}{\varepsilon^{k-1}}+\cdots+\frac{c_0\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{v}_0}{\varepsilon}\right. \end{aligned}$$

$$+[v_0+(c_1\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{v}_0)]+\cdots$$

$$+\varepsilon^s[v_s+(c_{s+1}\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_{k+s}\bar{v}_0)+\cdots\Big\} \tag{3.1}$$

(参看第四章§3(3.4)). 它与第四章§3(3.4)的不同就在于增加了边界层校正项. 因此在展开式中也含有两类函数, 即与 ε 无关的 u_i, $\bar{u}_i$ 和边界层函数 v_i, $\bar{v}_i$.

将(3.1)代入方程(1.3)和边界条件(1.4), (1.5)亦有类似于(2.5), (2.6), (2.7)的三个方程:

$$
\begin{aligned}
L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv (L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2 L_2)\Big\{&\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{u}_1+c_1\bar{u}_0}{\varepsilon^{k-1}}\\
&+\cdots+\frac{c_0\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{u}_0}{\varepsilon}\\
&+[u_0+(c_1\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{u}_0)]\\
&+\cdots+\varepsilon^s[u_s+(c_{s+1}\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k+s}\bar{u}_0)]+\cdots\Big\}\\
&+\varepsilon^{-2}(M_0+\varepsilon M_1+\cdots)\\
&\times\varepsilon\Big\{\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{v}_1+c_1\bar{v}_0}{\varepsilon^{k-1}}\\
&+\cdots+\frac{c_0\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{v}_0}{\varepsilon}\\
&+[v_0+(c_1\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{v}_0)]\\
&+\cdots+\varepsilon^s[v_s+(c_{s+1}\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_{k+s}\bar{v}_0)]+\cdots\Big\}=h,
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_0 u_\varepsilon \equiv \gamma_0\Big[&\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{u}_1+c_1\bar{u}_0}{\varepsilon^{k-1}}\\
&+\cdots+\varepsilon\Big(\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon^k}+\frac{c_0\bar{v}_1+c_1\bar{v}_0}{\varepsilon^{k-1}}+\cdots\Big)\Big]=0,
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

$$\gamma_1 u_\varepsilon \equiv \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \rho}\Big|_\Gamma = \left\{ \frac{c_0 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho}\Big|_\Gamma}{\varepsilon^k} + \frac{c_0 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \rho}\Big|_\Gamma + c_1 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho}\Big|_\Gamma}{\varepsilon^{k-1}} \right.$$

$$+ \cdots + \varepsilon^s \left[\frac{\partial u_s}{\partial \rho}\Big|_\Gamma + \left(c_{s+1} \frac{\partial \bar{u}_{k-1}}{\partial \rho}\Big|_\Gamma \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \cdots + c_{k+s} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho}\Big|_\Gamma \right) \right] + \cdots \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{c_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t}\Big|_\Gamma}{\varepsilon^k} + \frac{c_0 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t}\Big|_\Gamma + c_1 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t}\Big|_\Gamma}{\varepsilon^{k-1}} \right.$$

$$+ \cdots + \varepsilon^s \left[\frac{\partial v_s}{\partial t}\Big|_\Gamma + \left(c_{s+1} \frac{\partial \bar{v}_{k-1}}{\partial t}\Big|_\Gamma \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \cdots + c_{k+s} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t}\Big|_\Gamma \right) \right] + \cdots \right\} = 0. \tag{3.4}$$

和§2一样，在方程(3.2)中分别就两类函数比较 ε 幂的系数以得到确定系数 c_i 和函数 $\bar{u}_i$, u_i, $\bar{v}_i$, v_i 的方程，再在方程(3.3)，(3.4)中令 ε 同幂项系数为零以得到相应的边界条件.

关于 $\bar{u}_0$ 我们有下面的边值问题:

$$\varepsilon^{-k}: \qquad L_0 \bar{u}_0 = 0, \quad \gamma \bar{u}_0 = 0. \tag{3.5}$$

因此展开式(3.1)中的 $\bar{u}_0$ 就是齐次问题(1.8)的特征函数.

关于 $\bar{v}_0$(与 $\bar{u}_0$ 相应)我们有

$$\varepsilon^{-(k+1)}: \qquad M_0 \bar{v}_0 = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho}\Big|_\Gamma. \tag{3.7}$$

$\bar{v}_0$ 同样是边界层函数(参看(2.11)).

为了确定 $\bar{u}_1$ 我们有

$$\varepsilon^{-(k-1)}: \qquad L_0 \bar{u}_1 = -L_1 \bar{u}_0, \tag{3.8}$$

$$\gamma_0 \bar{u}_1 = -\gamma_0 \bar{v}_0. \tag{3.9}$$

方程(3.8)是非齐次方程，右端是已知函数，此问题可解的条件是：

$$-(L_1 \bar{u}_0,\ z_0) = -\int_\Gamma \bar{u}_1 \frac{\partial z_0}{\partial \rho} d\Gamma = \int_\Gamma \bar{v}_0 \frac{\partial z_0}{\partial \rho} d\Gamma$$

$$= \int_\Gamma \frac{1}{\lambda(\varphi)} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial \rho} \frac{\partial z_0}{\partial \rho} d\Gamma. \tag{3.10}$$

若条件(3.10)成立，则求 $\bar{u}_1$ 作为问题(3.8)，(3.9)的特解.

再由(3.2)和(3.4)得到确定 $\bar{v}_1$ 的边值问题：

ε^{-k}:
$$M_0 \bar{v}_1 = -M_1 \bar{v}_0, \tag{3.11}$$

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \rho}\right|_\Gamma. \tag{3.12}$$

从而可求得 $\bar{v}_1$，它也是边界层函数.

这样，我们确定了函数 $\bar{u}_0$，$\bar{v}_0$，$\bar{u}_1$ 和 $\bar{v}_1$. 假定我们已求得 $\bar{u}_i$，$\bar{v}_i(i \leqslant j-1,\ 1 \leqslant j \leqslant k-1)$. 现在由(3.2)，(3.3)来求 $\bar{u}_j$，由(3.2)，(3.4)来求 $\bar{v}_j$.

关于 $\bar{u}_j$ 我们有

$\varepsilon^{-(k-j)}$:
$$L_0 \bar{u}_j = -L_1 \bar{u}_{j-1} - L_2 \bar{u}_{j-2}, \tag{3.13}$$

$$\gamma_0 \bar{u}_j = -\gamma_0 \bar{v}_{j-1}. \tag{3.14}$$

此问题可解的充要条件是：

$$-(L_1 \bar{u}_{j-1} + L_2 \bar{u}_{j-2},\ z_0)$$

$$= -\int_\Gamma \bar{u}_j \frac{\partial z_0}{\partial \rho} d\Gamma = \int_\Gamma \bar{v}_{j-1} \frac{\partial z_0}{\partial \rho} d\Gamma. \tag{3.15}$$

假定此条件成立，我们求 $\bar{u}_j$ 作为问题(3.13)，(3.14)的特解.

关于 $\bar{v}_j$ 我们有

$$M_0 \bar{v}_j = -M_1 \bar{v}_{j-1} - \cdots - M_j \bar{v}_0, \tag{3.16}$$

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t}\right|_{t=0}=-\left.\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \rho}\right|_{\Gamma}. \tag{3.17}$$

利用常数变易法解出 $\bar{v}_j$，它也是边界层函数(参看(2.23))。

如此，我们可完全求出 $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{u}_1$, $\bar{v}_1$, $\cdots$, $\bar{u}_{k-1}$, $\bar{v}_{k-1}$.

现在来求 u_0. 由(3.2)和(3.3)得到

$$\varepsilon^0: \quad L_0(u_0+(c_1\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{u}_0)) +L_1(c_0\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{u}_0) +L_2(c_0\bar{u}_{k-2}+\cdots+c_{k-2}\bar{u}_0)=h, \tag{3.18}$$

$$\gamma_0(u_0+c_0\bar{v}_{k-1})=0 \tag{3.19}$$

或

$$u_0|_{\Gamma}=-c_0\bar{v}_{k-1}|_{\Gamma}.$$

因为 $\bar{u}_0$, $\bar{u}_1$, $\cdots$, $\bar{u}_{k-1}$ 分别满足方程(3.5), (3.8) 和 (3.13)，所以方程(3.18)可改写为

$$L_0u_0=-c_0(L_1\bar{u}_{k-1}+L_2\bar{u}_{k-2})+h. \tag{3.20}$$

问题(3.20), (3.19)的可解条件是:

$$(h-c_0(L_1\bar{u}_{k-1}+L_2\bar{u}_{k-2}),\ z_0)=c_0\int_{\Gamma}\bar{v}_{k-1}\frac{\partial z_0}{\partial \rho}\,d\Gamma. \tag{3.21}$$

因此，对于任意 h 可求得 c_0 的使(3.21)成立充要条件是 c_0 的系数不为零:

$$M=(L_1\bar{u}_{k-1}+L_2\bar{u}_{k-2},\ z_0)\ +\ \int_{\Gamma}\bar{v}_{k-1}\frac{\partial z_0}{\partial \rho}\,d\Gamma\neq 0, \tag{3.22}$$

其中 z_0 仍然是共轭齐次问题(2.16)的解. 若条件(3.22)成立，则由(3.21)可求得系数 c_0，然后求 u_0 作为问题(3.20), (3.19)的特解.

关于函数 v_0 由方程(3.2)和(3.4)得到

$$\varepsilon^{-1}: \quad M_0[v_0+(c_1\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{v}_0)] +M_1(c_0\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_k\bar{v}_0)+\cdots+M_kc_0\bar{v}_0=0, \tag{3.23}$$

$$\left.\frac{\partial v_0}{\partial t}\right|_\Gamma+\left.\frac{\partial u_0}{\partial \rho}\right|_\Gamma=0. \tag{3.24}$$

由于 $\bar{v}_0$, $\bar{v}_1$, …, $\bar{v}_{k-1}$ 满足方程 (3.6), (3.16), 因此方程 (3.23)可改写为

$$M_0 v_0=-c_0(M_1\bar{v}_{k-1}+\cdots+M_k\bar{v}_0). \tag{3.25}$$

解问题(3.25), (3.24)即求得 v_0, 它也是边界层函数.

显然,若条件(3.22)成立并且摄动问题 A_ε 的参数充分光滑,则可逐次确定所有 c_i, u_i 和 v_i.

应指出,函数 $\bar{v}_i$, v_i 只在边界 Γ 的 δ 邻域内有定义,和以前一样还必须将它们乘上平滑函数 $\psi(\rho)$: i) $\psi(\rho)=0$ $(\rho>1)$; ii) $\psi(\rho)\equiv1\left(\rho<\frac{1}{2}\right)$, 即有 $\psi(\rho)\bar{v}_i$ 和 $\psi(\rho)v_i$. 为书写简单起见,乘了平滑函数以后的 $\bar{v}_i$、v_i 仍表示为 $\bar{v}_i$、v_i.

3-2 伴随特征函数和伴随边界层函数 根据以上讨论,我们知道, 函数 $\bar{u}_0$, $\bar{u}_1$, …, $\bar{u}_{k-1}$ 分别是问题(3.5); (3.8), (3.9)和(3.13), (3.14)的解:

$$L_0\bar{u}_0=0, \quad \gamma_0\bar{u}_0=0; \tag{3.5}$$

$$L_0\bar{u}_1=-L_1\bar{u}_0, \tag{3.8}$$

$$\gamma_0\bar{u}_1=-\gamma_0\bar{v}_0; \tag{3.9}$$

$$L_0\bar{u}_j=-L_1\bar{u}_{j-1}-L_2\bar{u}_{j-2} \tag{3.13}$$

$$\gamma_0\bar{u}_j=-\gamma_0\bar{v}_{j-1} \tag{3.14}$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1,\ \bar{u}_{-1}\equiv0),$$

而函数 $\bar{v}_0$, $\bar{v}_1$, …, $\bar{v}_{k-1}$ 分别是问题(3.6), (3.7); (3.11), (3.12); (3.16), (3.17)的解:

$$M_0\bar{v}_0=0, \tag{3.6}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial t}\right|_{t=0}=-\left.\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial\rho}\right|_\Gamma; \tag{3.7}$$

$$M_0\bar{v}_1=-M_1\bar{v}_0, \tag{3.11}$$

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \rho}\right|_{\Gamma}; \tag{3.12}$$

$$M_0 \bar{v}_j = -M_1 \bar{v}_{j-1} - \cdots - M_j \bar{v}_0, \tag{3.16}$$

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \rho}\right|_{\Gamma} \tag{3.17}$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1).$$

这些函数存在的充要条件是，条件(3.10)，(3.15)，(3.22)应成立. 类似于第三章§4，我们称函数 $\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k-1}$ 为特征函数 $\bar{u}_0$ 关于摄动问题(**1.3**)，(**1.4**)，(**1.5**)的伴随特征函数；称函数 $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{k-1}$ 为特征函数 $\bar{u}_0$ 关于摄动问题(**1.3**)，(**1.4**)，(**1.5**)的伴随边界层函数.

3-3　余项估计　在级数(3.1)中我们取有限项和：

$$\begin{aligned}\hat{u}_n = &\frac{c_0 \bar{u}_0}{\varepsilon^k} + \cdots + \frac{c_0 \bar{u}_{k-1} + \cdots + c_{k-1}\bar{u}_0}{\varepsilon} \\ &+ [u_0 + (c_1 \bar{u}_{k-1} + \cdots + c_k \bar{u}_0)] \\ &+ \cdots + \varepsilon^{n-2}[u_{n-2} + (c_{n-1}\bar{u}_{k-1} + c_n \bar{u}_{k-2})] \\ &+ \varepsilon^{n-1}[u_{n-1} + c_n \bar{u}_{k-1}] + \varepsilon^n u_n \\ &+ \varepsilon\left\{\frac{c_0 \bar{v}_0}{\varepsilon^k} + \cdots + \varepsilon^n v_n\right\}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

在此有限项和中只包含系数 c_0 到 c_n 为止，因此 $\hat{u}_n$ 是在 $n+1$ 次迭代以后所得到的结果，此时伴随特征函数和伴随边界层函数都已求得.

现在我们在 $\hat{u}_n$ 中再加进边界层函数 $\varepsilon^{n+2}\tilde{v}_{n+1}$ 和函数 $\varepsilon^{n+1}\alpha_n$，$\varepsilon^{n+2}\alpha_{n+1}$：

$$\tilde{u}_n = \hat{u}_n + \varepsilon^{n+1}\alpha_n + \varepsilon^{n+2}(\tilde{v}_{n+1} + \alpha_{n+1}), \tag{3.27}$$

其中 $\tilde{v}_{n+1}$ 由下面边值问题确定：

$$M_0 \tilde{v}_{n+1} + M_1 v_n + M_2(v_{n-1} + c_n \bar{v}_{k-1}) + \cdots = 0, \tag{3.28}$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{v}_{n+1}}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \tag{3.29}$$

而函数 α_n 和 α_{n+1} 满足关系式:

$$\left.\frac{\partial\alpha_n}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=0,\quad (\alpha_n+v_n)\,|_{\rho=0}=0; \tag{3.30}$$

$$\left.\frac{\partial\alpha_{n+1}}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=0,\quad (\alpha_{n+1}+\tilde{v}_{n+1})\,|_{\rho=0}=0. \tag{3.31}$$

可直接验证，$\tilde{u}_n$ 精确地满足边界条件(1.4)和(1.5):

$$\gamma_0\tilde{u}_n\equiv\tilde{u}_n|_\Gamma=0, \tag{3.32}$$

$$\gamma_1\tilde{u}_n\equiv\left.\frac{\partial\tilde{u}_n}{\partial\rho}\right|_\Gamma=0, \tag{3.33}$$

并且

$$L_\varepsilon\tilde{u}_n=h+\varepsilon^{n+1}g_n(x,\varepsilon), \tag{3.34}$$

其中

$$\begin{aligned}g_n=(&L_1u_n+L_2u_{n-1}+M_1\tilde{v}_{n+1}+M_2v_n+\cdots+L_0\alpha_n\\&+\varepsilon L_0\alpha_{n+1}+\cdots+\varepsilon^3L_2\alpha_{n+1}).\end{aligned} \tag{3.35}$$

从函数 $u_0,\ u_1,\ \cdots,\ v_0,\ v_1,\ \cdots$ 的构造看出，若 $h\in W_p^{(s)}(D)$，则 $u_0\in W_p^{(s+2)}(D)$（参看第四章§2 (2.4)），$v_0\in W_p^{(s+1)}(D)$，$u_1\in W_p^{(s)}(D)$等等(参看[1]，[69])。

因此，粗略地说，我们有 $u_n\in W_p^{(s-2(n-1))}(D)$，$\alpha_n$，$v_n\in W_p^{(s-2n+1)}(D)$，$\alpha_{n+1}$，$\tilde{v}_{n+1}\in W_p^{(s-2n)}(D)$。从而看到，

$$g_n\in W_p^{(s-2n-4)}(D) \tag{3.36}$$

$(L_2\alpha_{n+1}\in W_p^{(s-2n-4)}(D))$，并且

$$\|g_n\|_{0,p}\leqslant c\|h\|_{2n+4,p}, \tag{3.37}$$

其中 c 与 ε，h 无关，是一常数．对于 $\|g\|_{m,p}$ 亦有类似的估计．从而推得若 $h\in W_p^{(2n+4)}(D)$ 则

$$\|g_n\|_{0,p}=O(1). \tag{3.38}$$

令

$$z_n=u_\varepsilon-\tilde{u}_n, \tag{3.39}$$

则 z_n 满足下面方程和边界条件:

$$L_\varepsilon z_n = -\varepsilon^{n+1} g_n(x, \varepsilon), \tag{3.40}$$

$$z_n\Big|_\Gamma = \frac{\partial z_n}{\partial \rho}\Big|_\Gamma = 0. \tag{3.41}$$

于是,根据(3.37)和估计式(1.9)得到

$$\varepsilon^m \|z_n\|_1 \leqslant c\varepsilon^{n+1}\|g_n\| = O(1)\varepsilon^{n+1}$$

或

$$\|u_\varepsilon - \tilde{u}_n\|_1 = \|z_n\|_1 \leqslant c_1 \varepsilon^{n+1-m}. \tag{3.42}$$

以上我们在级数(3.1)中取一特殊有限项和 $\hat{u}_n$ 作出了估计式(3.42). 现在在级数(3.1)中取前 s 项(取到 ε^s 项为止)部分和:

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon,s} = & \frac{c_0 \bar{u}_0}{\varepsilon^k} + \cdots + \frac{c_0 \bar{u}_{k-1} + \cdots + c_{k-1}\bar{u}_0}{\varepsilon} \\ & + [u_0 + (c_1 \bar{u}_{k-1} + \cdots + c_k \bar{u}_0)] \\ & + \cdots + \varepsilon^s [u_s + (c_{s+1}\bar{u}_{k-1} + \cdots + c_{s+k}\bar{u}_0)] \\ & + \varepsilon \left\{ \frac{c_0 \bar{v}_0}{\varepsilon^k} + \cdots + \frac{c_0 \bar{v}_{k-1} + \cdots + c_{k-1}\bar{v}_0}{\varepsilon} \right. \\ & + [v_0 + (c_1 \bar{v}_{k-1} + \cdots + c_k \bar{v}_0)] \\ & \left. + \cdots + \varepsilon^{s-1}[v_{s-1} + (c_s \bar{v}_{k-1} + \cdots + c_{s+k-1}\bar{v}_0)] \right\}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

我们来估计 $\|u_\varepsilon - u_{\varepsilon,s}\|$. 在估计式(3.42)中令 $n=s+m$ 并将 $\| \ \|_1$ 换为 $\| \ \| = \| \ \|_{0,p}$, 则有

$$\|u_\varepsilon - \tilde{u}_{s+m}\| \leqslant c_1 \varepsilon^{s+1} \tag{3.44}$$

下面我们要证明, 估计式(1.9)中的 m: $m \geqslant k$, 其中 k 是 Jordan 链 $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k-1}$ 的长度. 从而推得, $u_{\varepsilon,s}$ 的表达式(3.43)是作为 $\tilde{u}_{s+m}$ 的项包含在 $\tilde{u}_{s+m}$ 中. 在 $\tilde{u}_{s+m}$ 中的其余项, 即表达式

$$\widetilde{u}_{s+m}-u_{s,s}=\varepsilon^{s+1}[u_{s+1}+\cdots]+\cdots+\varepsilon^{s+1}[v_s+\cdots]+\cdots \tag{3.45}$$

的项在 $L_p(D)$ 中是 $O(\varepsilon^{s+1})$ 的量. 因此, 由(3.44)得到

$$\begin{aligned}\|u_s-u_{s,s}\| &\leqslant \|u_s-\widetilde{u}_{s+m}\|+\|\widetilde{u}_{s+m}-u_{s,s}\| \\ &\leqslant c_1\varepsilon^{s+1}+c_2\varepsilon^{s+1}=c\varepsilon^{s+1},\end{aligned}$$

即

$$\|u_s-u_{s,s}\|\leqslant c^{s+1}, \tag{3.46}$$

其中 $\|\ \|=\|\ \|_{0,p}$.

由(3.46)可知, 级数(3.1)是一渐近级数.

注 1 若齐次问题(1.8)有有限个线性无关特征函数: $\bar{u}_{10}, \bar{u}_{20}, \cdots, \bar{u}_{r0}$, 则讨论并无实质性不同. 此时对应于每一个特征函数都有一个伴随特征函数链: $\bar{u}_{i1}, \bar{u}_{i2}, \cdots, \bar{u}_{i,k_i-1}$ $(i=1, 2, \cdots, r)$, 而级数(3.1)类似于第三章§4 (4.45), 所不同的是, 必须增加边界层校正项.

根据以上讨论, 关于摄动问题(1.3), (1.4), (1.5)我们得到如下的论断:

定理 1 若摄动问题(1.3), (1.4), (1.5)对于任意充分小的 $\varepsilon\neq0$ 和任意右端函数 $h(x)$ 唯一可解, 方程(1.3)的系数, 右端和区域边界充分光滑, 对于某数 m 有估计式(1.9)成立; 此外, 退化问题(1.6), (1.7)位于谱上, 并且相应的齐次问题(1.8)只有一个特征函数 $\bar{u}_0$, 则 1)摄动问题(1.3), (1.4), (1.5)的解 u_ε 有渐近展开式(3.1), 其中 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_{k-1}$ 是特征函数 $\bar{u}_0$ 关于问题(1.3), (1.4), (1.5)的伴随特征函数, 而 $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{k-1}$ 是伴随边界层函数; 2) 系数 c_i 和函数 u_i, v_i 由公式(3.21), 问题(3.20), (3.19); (3.25), (3.24)确定; 3) 余项 $u_\varepsilon-u_{\varepsilon,s}$ 有估计式(3.46).

注 2 在范数 $\|\ \|_{l,p}$ 意义下亦有类似于(3.46)的估计.

3-4 关于展开式(3.1)中 k 和估计式(1.9)中 m 之间的关系

定理 2 若条件(1.9)成立，则条件(3.15)，(3.22) 成立只到 $k \leqslant m$ 为止，因此 Jordan 链：$\bar{u}_0, \bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k-1}$ 的长度等于 k；展开式(3.1)从阶为 $\varepsilon^{-k}(k \leqslant m)$ 项开始.

证明 利用反证法. 假定条件(3.15)，(3.22)直到 $k_1 > m$ 都成立. 此时我们可以构造 $\bar{u}_0$ 的伴随特征函数链：$\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_{k_1-1}$ 和伴随边界层函数链：$\bar{v}_0, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_{k_1-1}$，这些函数是问题(3.5)；(3.8)，(3.9)；(3.13)，(3.14)和问题(3.6)，(3.7)；(3.11)，(3.12)；(3.16)，(3.17)的解($k=k_1$).

现构造辅助函数

$$\check{u}_\varepsilon = \frac{\bar{u}_0}{\varepsilon^{k_1}} + \cdots + \frac{\bar{u}_{k_1-1} + \cdots + \bar{u}_0}{\varepsilon}$$

$$+ \varepsilon\left[\frac{\bar{v}_0}{\varepsilon^{k_1}} + \cdots + \frac{\bar{v}_{k_1-1} + \alpha_{k_1-1} + \bar{v}_{k_1-2} + \cdots + \bar{v}_0}{\varepsilon} + \tilde{v}_{k_1}\right.$$

$$\left. + (\bar{v}_{k_1-1} + \bar{v}_{k_1-2} + \cdots + \bar{v}_0) + \alpha_{k_1}\right], \tag{3.47}$$

其中 $\tilde{v}_{k_1}$ 是下面问题的解：

$$M_0 \tilde{v}_{k_1} = -M_1 \bar{v}_{k_1-1} - \cdots - M_{k_1} \bar{v}_0, \tag{3.48}$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{v}_{k_1}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{3.49}$$

而 α_{k_1-1}，α_{k_1} 是满足下面条件的任意充分光滑的函数：

$$\left.\frac{\partial \alpha_{k_1-1}}{\partial \rho}\right|_{\Gamma} = 0, \quad (\bar{v}_{k_1-1} + \cdots + \bar{v}_0 + \alpha_{k_1-1})\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{3.50}$$

$$\left.\frac{\partial \alpha_{k_1}}{\partial \rho}\right|_{\Gamma} = 0, \quad (\tilde{v}_{k_1} + \alpha_{k_1} + \bar{v}_{k_1-1} + \bar{v}_{k_1-2} + \cdots + \bar{v}_0)\big|_{\Gamma} = 0. \tag{3.51}$$

函数 $\bar{v}_i$ 和 $\tilde{v}_{k_1}$ 通常都应乘上平滑函数 $\psi(\rho)$，假定乘了平滑函数 $\psi(\rho)$ 以后的 $\bar{v}_i$，$\tilde{v}_{k_1}$ 仍用 $\bar{v}_i$，$\tilde{v}_{k_1}$ 表示.

根据函数$\bar{u}_i$, $\bar{v}_i$, α_i的构造(参看(3.5)~(3.16), (3.17))得到

$$L_s\check{u}_s=g(x,\ \varepsilon),\ \|g\|=O(1), \tag{3.52}$$

$$\check{u}_s|_\Gamma=0, \tag{3.53}$$

$$\left.\frac{\partial\check{u}_s}{\partial\rho}\right|_\Gamma=0. \tag{3.54}$$

另一方面，按条件(1.9)和表达式(3.47)对于充分小的ε我们有

$$O(\varepsilon^{m-k_1})=\varepsilon^m\|\check{u}_s\|\leqslant C\|L_s\check{u}_s\|.$$

当$m<k_1$时这与(3.52)矛盾．因此，$k_1\leqslant m$.

定理3 若条件(1.9)成立，并且Jordan链的长度$k\leqslant m$，则对摄动问题(1.3)，(1.4)，(1.5)的解u_s来说估计式(1.9)可换为以下形式:

$$\|u_s\|\leqslant\frac{c}{\varepsilon^k}, \tag{3.55}$$

其中c依赖于ε，但关于ε是一有界量.

证明：因为条件(1.9)成立,并且摄动问题A_s的参数充分光滑,所以摄动问题A_s有解$u_s(x)$，并且解是唯一的．按公式(3.27)构造函数$\tilde{u}_s(s=m-k)$．那末根据(3.34)和(3.37)我们有

$$L_s\tilde{u}_s=\varepsilon^{s+1}g_s(x,\ \varepsilon)+h(x), \tag{3.56}$$

其中$\|g_s(x,\ \varepsilon)\|=O(1)$．另一方面,按估计式(3.42)

$$\|u_s-\tilde{u}_s\|\leqslant c_1\,\varepsilon^{s+1-m} \tag{3.57}$$

(为简单起见,这里取$\|\ \|_1=\|\ \|=\|\ \|_{0,p}$)．根据函数$\tilde{u}_s$的构造(参看(3.27)和(3.26))我们有.

$$\|\tilde{u}_s\|\leqslant\left\|\frac{c_0\bar{u}_0}{\varepsilon^k}\right\|+\cdots+\left\|\frac{c_0\bar{u}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{u}_0}{\varepsilon}\right\|$$
$$+\left\|\frac{c_0\bar{v}_0}{\varepsilon^{k-1}}\right\|+\cdots+\|c_0\bar{v}_{k-1}+\cdots+c_{k-1}\bar{v}_0\|$$

$$+\|u_0+\cdots+\varepsilon v_0+\cdots\|. \tag{3.58}$$

由不等式(3.57)和(3.58)推出

$$\varepsilon^k\|u_s\|=\varepsilon^{m-s}\|u_s\|\leqslant\varepsilon^{m-s}\|u_s-\tilde{u}_s\|+\varepsilon^{m-s}\|\tilde{u}_s\|$$

$$\leqslant\varepsilon^{m-s}c_1\varepsilon^{s+1-m}+\varepsilon^{m-s}c_2\varepsilon^{-k}=O(1)\quad(s=m-k).$$

从而得到估计式(3.55).

3-5　条件(1.9)成立的一个充分条件($m=2$)

定理 4　设函数 u 是满足边界条件(1.4), (1.5)的光滑函数. 若算子 L_0 和 L_1 关于函数 u 是正的:

$$(L_0u,\ u)\geqslant 0,\quad (L_1u,\ u)\geqslant 0 \tag{3.59}$$

并且算子 L_2 关于函数 u 是正定的:

$$(L_2u,\ u)\geqslant c^2\|u\|^2, \tag{3.60}$$

则

$$\varepsilon^2\|u\|\leqslant\gamma\|L_\varepsilon u\|, \tag{3.61}$$

其中 γ 是与 ε 和 u 无关的常数.

定理 4 的证明与第四章 § 3 定理 2 的证明类似, 从略.

第6章

线性椭圆型微分算子特征值和特征函数的摄动问题

在第三章中我们曾讨论过矩阵特征值和特征向量的摄动问题，主要讨论退化问题有零特征值情形. 根据对应于零特征值的特征向量和伴随特征向量的 Jordan 链的不同结构构造了特征值和特征向量的渐近展开式. 现将这些结果推广到线性椭圆型微分算子上来，考虑摄动算子与退化算子同阶情形和摄动算子的阶数高于退化算子的情形.

§1 与退化算子同阶的摄动算子的特征值问题

1-1 特征值问题 为简单起见，我们考虑二阶椭圆型算子(一般讲，是非自共轭的)

$$L_0 u \equiv \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u. \tag{1.1}$$

相应的边界条件为

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{1.2}$$

其中 Γ 是所讨论的区域的边界.

设摄动算子 L_ε 为

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1, \tag{1.3}$$

其中 L_1 是二阶算子，$\varepsilon>0$，是小参数. 当 ε 充分小时 L_ε 在同样边界条件(1.2)下仍然是椭圆型算子.

摄动算子 L_ε 的特征值问题是：求 λ_ε 使得齐次边值问题

$$L_\varepsilon v_\varepsilon=\lambda_\varepsilon v_\varepsilon, \tag{1.4}$$

$$v_\varepsilon|_\Gamma=0 \tag{1.5}$$

有非零解 v_ε. λ_ε 称为算子 L_ε 的特征值，v_ε 称为与 λ_ε 相应的特征函数.

退化算子 L_0 的特征值问题是：

$$L_0 u_0=\lambda_0 u_0, \tag{1.6}$$

$$u_0|_\Gamma=0, \tag{1.7}$$

其中 λ_0 是算子 L_0 的特征值，$u_0\neq0$ 是与 λ_0 相应的特征函数.

我们主要讨论 $\lambda_0=0$ 的情形.

1-2 伴随特征函数和 Jordan 链 设函数 u_0 是对应于 $\lambda_0=0$ 的特征函数，即

$$L_0 u_0=0, \tag{1.8}$$

$$u_0|_\Gamma=0. \tag{1.7}$$

类似地，若问题

$$L_0 u_i=u_{i-1}, \quad u_i|_\Gamma=0 \tag{1.9}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

有解 u_1, u_2, $\cdots$, u_{n-1}，而问题

$$L_0 u=u_{n-1},\ u|_\Gamma=0 \tag{1.10}$$

不可解，则称函数 u_0, u_1, $\cdots$, u_{n-1} 形成长度为 n 的 Jordan 链，而函数 $u_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ 称为与特征函数 u_0 相应的 i 阶伴随特征函数.

我们只限于考虑与 $\lambda_0=0$ 相应的 Jordan 链只有一条

$u_0, u_1, \cdots, u_{n-1}$ 的情形. 对于存在若干个 Jordan 链的一般情形其处理方法与代数情形相似,请参看[2]的附录 I.

1-3 渐近展开式的构造 我们求算子 L_ε 当 $\varepsilon\to 0$ 而趋于零的特征值 λ_ε 和相应特征函数 v_ε 的展开式为:

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}+\lambda_2\varepsilon^{\frac{2}{n}}+\cdots, \tag{1.11}$$

$$v_\varepsilon=v_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}v_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}v_2+\cdots. \tag{1.12}$$

将(1.11), (1.12)代入(1.4)和(1.5), 合并 ε 的同幂项, 并令 $\varepsilon^{\frac{k}{n}}$ 的系数为零, 则得到一系列二阶椭圆型微分方程边值问题:

$$L_0v_0=0, \quad v_0|_\Gamma=0, \tag{1.13}$$

$$L_0v_k=b_k, \quad v_k|_\Gamma=0 \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{1.14$_k$}$$

$$b_k=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j v_{k-j} & (0<k<n),\\ \sum\limits_{j=1}^{k}\lambda_j v_{k-j}-L_1v_{k-n} & (k\geqslant n)\end{cases} \tag{1.15}$$

(参看第三章 § 5).

边值问题(1.13)表明, 其非零解 v_0 除相差一个常数因子外就是退化算子 L_0 与 $\lambda_0=0$ 相应的特征函数 u_0. 令 $v_0=u_0$.

我们知道, 特征值问题(1.6), (1.7)的零特征值也是共轭算子 L_0^* 的特征值. 设与 $\lambda_0=0$ 相应的特征函数为 z_0, 我们有

$$L_0^*z_0=0, \quad z_0|_\Gamma=0. \tag{1.16}$$

z_0 除常数因子外是唯一的.

和第三章 § 5 一样(参看那里的 (5.50)和(5.51)), 由于存在长度为 n 的 Jordan 链:

$$(u_0, u_1=Bu_0, \cdots, u_{n-1}=B^{n-1}u_0), \quad (B=L_0^{-1})$$

并且 $$(B^{p-1}u_0,\ z_0)=0 \quad (p<n),$$

而 $$(B^{n-1}u_0,\ z_0)\neq 0,$$

即

$$(u_{n-1},\ z_0)\neq 0. \tag{1.17}$$

我们可以标准化 z_0 使得

$$(B^{n-1}u_0,\ z_0)=(u_{n-1},\ z_0)=1, \tag{1.18}$$

其中 u_{n-1} 是最高阶的伴随特征函数(参看公式(1.10)).

边值问题(1.14)的可解条件是:

$$(b_k,\ z_0)=\iint\limits_D b_k z_0\,dx=0, \tag{1.19}$$

其中 D 是 n 维空间的有界区域, Γ 是其边界.

重复第三章§5中(5.52)~(5.88)的讨论,假定

$$(L_1 u_0,\ z_0)\neq 0 \quad (\text{条件 } \Gamma), \tag{1.20}$$

我们得到

$$\lambda_1^n=\bar{c}=(L_1 u_0,\ z_0). \tag{1.21}$$

因此有 n 个相异的不等于零的根 λ_1. 固定其中的一个,从而求得

$$b_1=\lambda_1 v_0=\lambda_1 u_0, \qquad v_1=Bb_1. \tag{1.22}$$

迭代过程延续进行,我们可以逐次确定 λ_k 和 $v_k(k=1,2,\cdots)$, 其过程与第三章§5的代数情形无甚差异,不再重复叙述,但对于微分算子情形应研究函数 v_k 的可微性,这是与代数情形唯一不同之处. 因为 v_k 是由边值问题(1.14_k)所确定,如果 $v_0=u_0\in W_p^{(2)}$, 那末逐次确定的 b_k 都属于 L_p, 这就是说 $v_k\in W_p^{(2)}$ (参看[68]和第四章§2公式(2.4)和(2.5)). 因此迭代过程能够完全实现.

§2 小参数在高阶导数项的摄动算子的特征值问题

2-1 特征值问题 设摄动算子 L_ε 为

$$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2. \tag{2.1}$$

为简单起见，假定 L_2 是四阶椭圆型算子，L_1 是不高于三阶的算子，L_0 是二阶椭圆型算子(参看第五章§1)．

摄动算子 L_ε 的特征值问题是：求 λ_ε 使得齐次边值问题

$$L_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon, \tag{2.2}$$

$$u_\varepsilon|_\Gamma = 0,\ \left.\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\right|_\Gamma = 0, \tag{2.3}$$

有非零解 u_ε，其中 n 是边界 Γ 的法线方向．λ_ε 称为算子 L_ε 的特征值，u_ε 称为与 λ_ε 相应的特征函数．

问题 (2.2)，(2.3) 和 (1.4)，(1.5) 不同．由于小参数 ε 在高阶导数项，当 $\varepsilon=0$ 时算子 L_ε 退化为低阶算子 L_0，此时退化算子 L_0 的特征值问题是：

$$L_0 u_0 = \lambda_0 u_0, \tag{2.4}$$

$$u_0|_\Gamma = 0, \tag{2.5}$$

其中 λ_0 是算子 L_0 的特征值，$u_0 \neq 0$ 是与 λ_0 相应的特征函数．因此摄动算子降阶后要失去边界条件 (2.3) 中的第二个边界条件．此外，如果我们还考虑(2.4)，(2.5)的零特征值情形，则必须将§1的构造方法和第二章所述的方法结合起来，才能正确地得到特征值问题(2.2)和(2.3)的解 λ_ε(当 $\varepsilon\to 0$ 而趋于零的特征值)和 u_ε 的渐近展开式．为此我们假定，摄动算子 L_ε 退化为算子 L_0 时满足正则退化的代数条件，即在算子 L_ε 的第二次分解

$$L_\varepsilon=\varepsilon^{-2}(M_0+\varepsilon M_1+\varepsilon^2 M_2+\cdots) \tag{2.6}$$

中算子 M_0 的特征多项式恰有一根 $-\lambda(\varphi)(\mathrm{Re}\lambda(\varphi)>0)$，算子 M_0 的表达式见第五章 § 2(2.2)。

为简单起见，我们假定与 $\lambda_0=0$ 相应的 Jordan 链只有一条，其长度为 n：$(u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$（参看(1.9)，(1.10)）。

2-2 渐近展开式的构造 根据以上假定，算子 L_ε 的当 $\varepsilon\to 0$ 而趋于零的 n 个特征值 λ_ε 的渐近展开式仍和 § 1 一样，有以下形式：

$$\lambda_\varepsilon=\lambda_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}+\lambda\varepsilon^{\frac{2}{n}}+\cdots, \tag{2.7}$$

而相应的特征函数 u_ε 的展开式应有以下形式：

$$u_\varepsilon=v_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}v_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}v_2+\cdots+\varepsilon^{\frac{k}{n}}v_k$$
$$+\cdots+\varepsilon(w_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}w_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}w_2+\cdots+\varepsilon^{\frac{k}{n}}w_k+\cdots), \tag{2.8}$$

即有两个和式，在第二个和式中 w_k 是边界层类型函数。

为了确定函数 v_i 和 w_i $(i=0, 1, \cdots)$，我们利用算子 L_ε 的原来的展开式(2.1)和它的第二次分解(2.6)。将 (2.8) 代入方程(2.2)和边界条件(2.3)，我们有

$$\begin{aligned}0=&L_\varepsilon u_\varepsilon-\lambda_\varepsilon u_\varepsilon\\=&(L_0+\varepsilon L_1+\varepsilon^2 L_2-(\lambda_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}+\lambda_2\varepsilon^{\frac{2}{n}}+\cdots)I)\\&\times(v_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}v_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}v_2+\cdots)\\&+[\varepsilon^{-2}(M_0+\varepsilon M_1+\cdots)-(\lambda_1\varepsilon^{\frac{1}{n}}+\lambda_2\varepsilon^{\frac{2}{n}}+\cdots)I]\\&\times\varepsilon(w_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}w_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}w_2+\cdots).\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}0=u_\varepsilon|_\Gamma=&(v_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}v_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}v_2+\cdots)|_\Gamma\\&+\varepsilon(w_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}w_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}w_2+\cdots)|_{t=0},\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$0=\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}\Big|_\Gamma=\frac{\partial}{\partial n}\left(v_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}v_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}v_2+\cdots\right)\Big|_\Gamma$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(w_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}}w_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}}w_2+\cdots\right)\Big|_{t=0}, \tag{2.11}$$

其中 $t=\rho/\varepsilon$, $\rho=n$, $\frac{\partial}{\partial n}=\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial t}$. 在(2.9), (2.10)和(2.11)中合并 ε 的同幂项，并令其系数为零，则可得到确定 v_i 和 w_i 的一系列边值问题. 在(2.9)和(2.10)中令 ε^0 的系数为零，则有

$$L_0v_0=0,\ v_0|_\Gamma=0. \tag{2.12}$$

因此 v_0 就是特征函数. 在(2.9)中令 ε^{-1} 的系数为零，则有

$$M_0w_0=0. \tag{2.13}$$

在(2.11)中令 ε^0 的系数为零，则有

$$\frac{\partial w_0}{\partial t}\Big|_{t=0}+\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_\Gamma=0,$$

即

$$\frac{\partial w_0}{\partial t}\Big|_{t=0}=-\frac{\partial v_0}{\partial n}\Big|_\Gamma, \tag{2.14}$$

其中 v_0 是由(2.12)已确定的函数. 解边值问题(2.13), (2.14)可求得 w_0. 根据正则退化的假定，w_0 是边界层类型函数(参看第五章 § 2(2.9)～(2.11)).

假定我们已求得 v_k 和 $w_k(k<j)$. 对于 v_j 由(2.9)我们得到方程

$$L_0v_j=b_j, \tag{2.15}$$

其中

$$b_j=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_iv_{j-i}\ (j<n),\\ \sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_iv_{j-i}-L_1v_{j-n}\ \ (n\leqslant j<2n),\\ \sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_iv_{j-i}-L_1v_{j-n}-L_2v_{j-2n}\ (j\geqslant 2n).\end{cases} \tag{2.16}$$

当 $j<n$ 时，由(2.10)，方程(2.15)的边界条件是：

$$v_j|_\Gamma=0. \tag{2.17}$$

当 $j=n+k$ ($k\geqslant 0$)时，由(2.10)，边界条件是：

$$v_{n+k}|_\Gamma=-w_k|_{t=0}. \tag{2.18}$$

所以当 $j<n$ 时得到确定 v_j 的边值问题：

$$L_0 v_j=\sum_{i=1}^{j}\lambda_i v_{j-i}, \tag{2.15'}$$

$$v_j|_\Gamma=0. \tag{2.17'}$$

当 $n\leqslant j<2n$ 和 $j\geqslant 2n$ 时分别得到确定 v_j 的边值问题：

$$L_0 v_j=\sum_{i=1}^{j}\lambda_i v_{j-i}-L_1 v_{j-n}, \tag{2.15''}$$

$$v_{n+k}|_\Gamma=-w_k|_{t=0} \tag{2.18'}$$

和边值问题：

$$L_0 v_j=\sum_{i=1}^{j}\lambda_i v_{j-i}-L_1 v_{j-n}-L_2 v_{j-2n}, \tag{2.15'''}$$

$$v_{2n+k}|_\Gamma=-w_k|_{t=0}\quad (k\geqslant 0). \tag{2.18''}$$

应指出，在(2.16)中所有 λ_i 都是尚未确定的数.

当 $j<n$ 时边值问题(2.15′)，(2.17′)的可解条件和第三章§5情形一样，仍为

$$(b_j,\ z_0)=0, \tag{2.19}$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i v_{j-i},\ z_0\right)=0. \tag{2.19'}$$

在(2.19)中 b_j 是伴随特征函数 u_r($r\leqslant j-1$)的线性组合. 由于 $j<n$，所以 $r\leqslant j-1<n-1$. 因此 u_r 不是最高阶伴随特征函数，它们与 z_0 都是正交的(参看第三章§5(5.66)). 从而推得，条件(2.19)当 $j<n$ 时是自然成立的.

解边值问题 (2.15), (2.17) 以后, 我们可借助于 $v_j(j\leqslant n-1)$来构造相应的边界层函数 w_j. 由(2.9)和(2.11)得到 w_j 应满足的微分方程和边界条件:

$$M_0 w_j = \sum_{i=1}^{j} \lambda_j w_{j-i}, \tag{2.20}$$

$$\left.\frac{\partial w_j}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial v_j}{\partial n}\right|_{\Gamma}. \tag{2.21}$$

解此边值问题即求得我们所要的 $w_j(j\leqslant n-1)$.

现考虑 $j=n$ 的情形. 由(2.15″), (2.18′)我们有

$$L_0 v_n = b_n, \tag{2.22}$$

$$v_n|_{\Gamma} = -w_0|_{t=0}, \tag{2.23}$$

由(2.16), 其中 b_n 有以下表达式:

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_{n-i} - L_1 v_0. \tag{2.24}$$

如果我们利用 L_0 的逆算子符号 B, 和第三章 § 5 一样, 得到类似的公式(参看第三章 § 5 公式(5.84)):

$$b_n = \lambda_1^n B^{n-1} u_0 - L_1 u_0 + \cdots = \lambda_1^n u_{n-1} - L_1 u_0 + \cdots, \tag{2.25}$$

其中未写出的项表示是与 z_0 正交的一些项.

我们将 z_0 标准化, 使得$(u_{n-1}, z_0)=1$. 根据格林公式(见第四章(4.9))和(2.25), 边值问题(2.22), (2.23) 的可解条件有以下形式:

$$\begin{aligned}0 &= (b_n, z_0) + \int_{\Gamma} v_n \frac{\partial z_0}{\partial \nu} d\Gamma \\ &= \lambda_1^n - (L_1 u_0, z_0) - \int_{\Gamma} w_0 \frac{\partial z_0}{\partial \nu} d\Gamma\end{aligned} \tag{2.26}$$

或

$$\lambda_1^n = \bar{c}, \tag{2.27}$$

这里

$$\bar{c} = (L_1 u_0, z_0) + \int_{\Gamma} w_0 \frac{\partial z_0}{\partial n} d\Gamma. \tag{2.28}$$

我们假定，

$$(L_1 u_0,\ z_0)+\int_\Gamma w_0 \frac{\partial z_0}{\partial n} d\Gamma \neq 0. \qquad (2.29)$$

此条件与第三章§5中所述的条件Γ是相似的.

因为w_0, z_0都是已知的函数，所以$w_0|_\Gamma$, $\left.\frac{\partial z_0}{\partial n}\right|_\Gamma$也都是知道的.从而推得边界条件(2.23)的右端也是已知的.如此由(2.27)，(2.28)可求得n个特征值$\lambda_1=\sqrt[n]{c}$.根据条件(2.29)$\lambda_1\neq 0$.

我们固定n个λ_1中的一个.由$b_1=\lambda_1 v_0$求得b_1.然后在(2.15)中令$j=1$，按b_1在边界条件(2.17)($j=1$)下求函数v_1.求得v_1以后解边值问题(2.20)，(2.21)($j=1$)求边界层函数w_1.

和第三章§5类似，将迭代过程延续下去，根据边值问题(2.15)，(2.17)和边值问题(2.15)，(2.18)($j=n+k$, $k\geqslant 0$)的可解条件可逐次确定λ_{k+1}, b_{k+1}和v_{k+1}($k=0$, 1, …)(参看第三章§5的最后部分).求得v_{k+1}以后可以求边界层函数w_{k+1}.迭代过程可以无限延续下去，只要摄动问题的系数和边界充分光滑即可.

迭代过程进行到$N=ns$以后，我们求得

$$\lambda_{N,\varepsilon}=\lambda_1 \varepsilon^{\frac{1}{n}}+\lambda_2 \varepsilon^{\frac{2}{n}}+\cdots+\lambda_N \varepsilon^s, \qquad (2.30)$$

$$v_{N,\varepsilon}=v_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}} v_1+\varepsilon^{\frac{2}{n}} v_2+\cdots+\varepsilon^s v_N$$
$$+\varepsilon(w_0+\varepsilon^{\frac{1}{n}} w_1+\cdots+\varepsilon^s w_N)+\varepsilon^{s+1}\alpha, \qquad (2.31)$$

其中α应选取得使$v_{N,\varepsilon}$满足(2.3)中的两个边界条件.由(2.9)，(2.10)，(2.11)我们有

$$L_\varepsilon v_{N,\varepsilon}-\lambda_{N,\varepsilon} v_{N,\varepsilon}=O(\varepsilon^{s+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}}), \qquad (2.32)$$

$$v_{N,\varepsilon}\big|_{\Gamma}=0,\quad \frac{\partial v_{N,\varepsilon}}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=0. \tag{2.33}$$

因此，$v_{N,\varepsilon}$ 准确到 $O(\varepsilon^{s+\frac{1}{n}-\frac{1}{2}})$ 满足特征函数方程 (2.2). 关于特征值和特征函数的误差估计，有兴趣的读者请参看[1]的§9.

以上结果可推广到 $2(k+l)$ 阶椭圆型算子的特征值问题，只须假定当 $\varepsilon=0$ 时该算子正则退化为 $2k$ 阶椭圆型算子即可.

附　　录

渐 近 展 开

1. 阶的符号　O 和 o 称为阶符. 假定在集合 S 上给定两个函数 $f(\varepsilon)$ 和 $\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon\in S$, 并设 a 是集合 S 的极限点, a 可能属于 S, 也可能不属于 S.

定义 1　关系式

$$f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon)),\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S \tag{1}$$

表示,存在常数 $M>0$ 及点 a 的邻域 U 使得下列不等式成立:

$$|f(\varepsilon)|\leqslant M|\varphi(\varepsilon)|,\ \varepsilon\in U\cap S. \tag{2}$$

若 $\varphi(\varepsilon)$ 在 S 上不为零, 则(2)显然表示当 $\varepsilon\to a$ 时 $f(\varepsilon)/\varphi(\varepsilon)$ 保持有界:

$$\varlimsup_{\varepsilon\to a}\left|\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right|<\infty. \tag{3}$$

例如, 当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\begin{aligned}
&\sin\varepsilon=O(\varepsilon), &&\sin\varepsilon^2=O(\varepsilon^2);\\
&\sin 7\varepsilon=O(\varepsilon), &&\sin 2\varepsilon-2\varepsilon=O(\varepsilon^3);\\
&\cos\varepsilon=O(1), &&1-\cos\varepsilon=O(\varepsilon^2);\\
&J_0(\varepsilon)=O(1), &&J_0(\varepsilon)-1=O(\varepsilon^2);\\
&\sinh\varepsilon=O(\varepsilon), &&\cosh\varepsilon=O(1);\\
&\tanh\varepsilon=O(\varepsilon), &&\tan\varepsilon=O(\varepsilon);\\
&\coth\varepsilon=O(\varepsilon^{-1}), &&\cot\varepsilon=O(\varepsilon^{-1}).
\end{aligned}$$

定义 2　设函数 f 和 φ 不只是 ε 而且也是变量 x 的函数, 即 $f=f(x,\varepsilon)$, $\varphi=\varphi(x,\varepsilon)$. 若存在与 ε 无关的正数 M 以及点 a 的邻域 U 使得下列不等式成立:

$$|f(x,\varepsilon)|\leqslant M|\varphi(x,\varepsilon)|,\ \varepsilon\in U\cap S, \tag{4}$$

则可写

$$f(x,\ \varepsilon)=O[\varphi(x,\ \varepsilon)],\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S. \tag{5}$$

若常数 M 和 a 的邻域 U 都与 x 无关，则称关系式(5)关于 x **一致成立**；否则称为**非一致成立**.

例如：

$$\sin(x+\varepsilon)=O(1)=O(\sin x)\text{ 当 }\varepsilon\to 0\text{ 时一致成立，}$$

而

$$e^{-\varepsilon x}-1=O(\varepsilon)\text{ 当 }\varepsilon\to 0\text{ 时非一致成立，}$$

$$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=O(\varepsilon)\text{ 当 }\varepsilon\to 0\text{ 时非一致成立.}$$

定义 3 关系式

$$f(\varepsilon)=o(\varphi(\varepsilon)),\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S \tag{6}$$

表示，对于任意一个与 ε 无关的正数 δ，存在点 a 的邻域 U_δ，使得下面不等式成立：

$$|f(\varepsilon)|\leqslant\delta|\varphi(\varepsilon)|,\ \varepsilon\in U_\delta\cap S. \tag{7}$$

若 $\varphi(\varepsilon)$ 在 S 上不为零，则(7)表示

$$\lim_{\varepsilon\to a}\left|\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\right|=0. \tag{8}$$

例如：当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\sin\varepsilon=o(1),\qquad \sin\varepsilon^2=o(\varepsilon);$$

$$\cos\varepsilon=o(\varepsilon^{-1/2}),\qquad J_0(\varepsilon)=o(\varepsilon^{-1});$$

$$\coth\varepsilon=o(\varepsilon^{-3/2}),\qquad \cot\varepsilon=o[\varepsilon^{-(n+1)/n}]\quad(n>0);$$

$$1-\cos\varepsilon=o(\varepsilon),\qquad \exp(-\varepsilon^{-1})=o(\varepsilon^n)\quad(\text{对一切}n).$$

定义 4 设 $f=f(x,\ \varepsilon)$，$\varphi=\varphi(x,\ \varepsilon)$. 若不等式(7)中的正数 δ 和 a 点的邻域 U_δ 都与 x 无关，则称关系式

$$f(x,\ \varepsilon)=o[\varphi(x,\ \varepsilon)],\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S \tag{9}$$

关于 x **一致成立**；否则称为**非一致成立**.

例如：

$$\sin(x+\varepsilon)=o(\varepsilon^{-1/3})\quad\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时一致成立，}$$

而

$$e^{-\varepsilon x}-1=o(\varepsilon^{1/2})\quad\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时非一致成立，}$$

$$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=o(\varepsilon^{3/4})\quad\text{当 }\varepsilon\to 0\text{ 时非一致成立.}$$

定义 5 关系式 $f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon))\ (\varepsilon\to a)$ 和 $f(\varepsilon)=o(\varphi(\varepsilon))\ (\varepsilon\to a)$ 称为**阶的关系式**.

定义 6 关系式

$$f(\varepsilon)\sim\varphi(\varepsilon),\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S \tag{10}$$

表示
$$\frac{f(\varepsilon)}{\varphi(\varepsilon)}\to 1,\ \varepsilon\to a.$$

形如下面的阶的关系式称为**渐近公式**或**渐近估计**:

$$\sin 2\varepsilon=O(\varepsilon)\quad(\varepsilon\to 0),\ 1-\cos\varepsilon=O(\varepsilon)\quad(\varepsilon\to 0),$$
$$\exp(-\varepsilon)=O(\varepsilon^{-n})\quad(\varepsilon\to+\infty,\ n\geqslant 1),$$
$$\varepsilon=O((\ln\varepsilon)^{-n})\quad(\varepsilon\to 0,\ n\geqslant 1),$$
$$\sin\varepsilon=O(1)\quad(0<\varepsilon<+\infty).$$

阶的关系式具有一系列简单性质,我们不加证明地列写于下,详细证明请参看[72].

1) 若 $f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon))$, $\varepsilon\to a$, $\varepsilon\in S$, 则
$$|f(\varepsilon)|^{\alpha}=O(|\varphi(\varepsilon)|^{\alpha}),\ \alpha>0;\tag{11}$$

2) 若 $f_i(\varepsilon)=O(\varphi_i(\varepsilon))$, $\varepsilon\to a$, $\varepsilon\in S$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则
$$\sum_{i=1}^{n}a_i f_i(\varepsilon)=O\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i||\varphi_i(\varepsilon)|\right),\ a_i=\text{const};\tag{12}$$

3) 若 $f_i(\varepsilon)=O(\varphi_i(\varepsilon))$, $\varepsilon\to a$, $\varepsilon\in S$, $i=1,2,\cdots,n$, 则
$$\prod_{i=1}^{n}f_i(\varepsilon)=O\left(\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(\varepsilon)\right);\tag{13}$$

4) 在一般情况下对阶的关系不可微分.

例如,函数
$$f(\varepsilon)=e^{-1/\varepsilon}\sin e^{1/\varepsilon}$$
满足 $f(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0(\varepsilon>0)$. 但它的导数
$$f'(\varepsilon)=\varepsilon^{-2}[e^{-1/\varepsilon}\sin e^{1/\varepsilon}-\cos e^{1/\varepsilon}],$$
当 $\varepsilon\to 0$ 时极限不存在;

5) 对阶的关系式可以积分:设 S 是区间 $\alpha<\varepsilon<\beta$, 并且当 $\varepsilon\to\beta$ 时 $f(\varepsilon)=O(\varphi(\varepsilon))$, 那末
$$\int_{\varepsilon}^{\beta}f(\tau)d\tau=O\left(\int_{\varepsilon}^{\beta}|\varphi(\tau)|d\tau\right),\ \varepsilon\to\beta;\tag{14}$$

6) 对阶的关系式可以按变量 x 进行积分:

设 $f(x,\varepsilon)=O(\varphi(x,\varepsilon))$ 当 $\varepsilon\to a$, $\varepsilon\in S$ 时关于 x 一致成立,那末
$$\int_{c}^{d}f(\tau,\varepsilon)d\tau=O\left(\int_{c}^{d}|\varphi(\tau,\varepsilon)|d\tau\right),\quad\varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S.\tag{15}$$

最后,我们指出,阶的关系式可以作如下的组合:
$$O(O(f))=O(f),$$

$$O(o(f))=o(O(f))=o(o(f))=o(f),$$
$$O(f)O(\varphi)=O(f\varphi),$$
$$O(f)o(\varphi)=o(f)o(\varphi)=o(f\varphi)$$
$$O(f)+O(f)=O(f)+o(f)=O(f),$$
$$o(f)+o(f)=o(f).$$

2. 渐近序列和渐近展开

定义 7 设 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 是给定在 S 上的函数序列. 若

$$\varphi_{n+1}(\varepsilon)=o(\varphi_n(\varepsilon)),\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S, \tag{16}$$

则称函数序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 是渐近序列.

例: 当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\varphi_n(\varepsilon)=\varepsilon^n,\ \varepsilon^{n/3},\ (\log\varepsilon)^{-n},\ (\sin\varepsilon)^n,\ (\cot\varepsilon)^{-n}$$

都是渐近序列.

若函数序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 是无穷的,并且条件(16)关于 n 一致成立,则称函数序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ **关于 n 是一致渐近序列**. 若函数 φ_n 还依赖于变量 x 并且条件(16)关于变量 x 一致成立, 则称函数序列 $\{\varphi_n\}$ **关于变量 x 是一致渐近序列.**

定义 8 若两个函数序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$, $\{\psi_n(\varepsilon)\}$ 具有以下性质:

$$\varphi_n(\varepsilon)=O(\psi_n(\varepsilon)),\ \psi_n(\varepsilon)=O(\varphi_n(\varepsilon)), \tag{17}$$
$$\varepsilon\to a,\quad \varepsilon\in S,$$

则称两个函数序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$, $\{\psi_n(\varepsilon)\}$ 是等价的.

从前一节所列举的阶的关系式的性质,可以得到如下的论断:

1) 若 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 是渐近序列,则序列 $\{|\varphi_n(\varepsilon)|^\alpha\}$, $\alpha>0$ 也是渐近序列;

2) 设 S 是区间 $\alpha<\varepsilon<\beta$, 并且当 $\varepsilon\to\beta$ 时序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 是渐近序列,则序列

$$\psi_n(\varepsilon)=\int_\varepsilon^\beta |\varphi_n(\tau)|d\tau \tag{18}$$

当 $\varepsilon\to\beta$ 时也是渐近序列(自然假定所有积分是收敛的);

3) 设 $c<x<d$ 并且当 $\varepsilon\to a$, $\varepsilon\in S$ 时序列 $\{\varphi_n(x,\ \varepsilon)\}$ 关于变量 x 是一致渐近序列,则

$$\psi_n(\varepsilon)=\int_c^d|\varphi_n(\tau,\ \varepsilon)|d\tau,\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S \tag{19}$$

也是渐近序列;

4) 设 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$, $\{\psi_n(\varepsilon)\}$ 是两个等价的序列, 而 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 是渐近序列, 则 $\{\psi_n(\varepsilon)\}$ 也是渐近序列.

定义 9 若函数 $f(\varepsilon)$ 可表示为

$$f(\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon)+o(\varphi_{N-1}(\varepsilon)),\ \varepsilon\to a,\ \ \varepsilon\in S, \tag{20}$$

即

$$\frac{f(\varepsilon)-\sum_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon)}{\varphi_{N-1}(\varepsilon)}\to 0,\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S,$$

则 N 项之和

$$\sum_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon) \tag{21}$$

称为函数 $f(\varepsilon)$ 当 $\varepsilon\to a$ 时到第 N 项为止的渐近展开式, 并表示为:

$$f(\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{N-1}a_n\varphi_n(\varepsilon),\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S. \tag{22}$$

若(20)对于任意正整数 N 都成立, 则称形式级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(\varepsilon)$ 为函数 $f(\varepsilon)$ 当 $\varepsilon\to a$ 时的渐近展开式, 并表示为

$$f(\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(\varepsilon),\ \varepsilon\to a. \tag{23}$$

若渐近序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 给定, 函数 $f(\varepsilon)$ 按其展开为渐近式, 则展开式系数 a_k 按下面公式确定:

$$a_0=\lim_{\varepsilon\to a}\frac{f(\varepsilon)}{\varphi_0(\varepsilon)},\quad a_k=\lim_{\varepsilon\to a}\frac{f(\varepsilon)-\sum_{i=0}^{k-1}a_i\varphi_i(\varepsilon)}{\varphi_k(\varepsilon)}. \tag{24}$$

渐近展开可能收敛, 也可能发散.

形式级数 $\sum a_n\varphi_n(\varepsilon)$ (有限项或无限项) 称为**渐近级数**. 若 $\varphi_n(\varepsilon)=\varepsilon^n$, 则称 $\sum a_n\varepsilon^n$ 为渐近幂级数.

定义 10 设 $f=f(x,\ \varepsilon)$ 是变量 x 和参数 ε 的函数, $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 是 $\varepsilon\to a$ 时的渐近序列. 将函数 $f(x,\ \varepsilon)$ 以渐近序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 作渐近展开式:

$$f(x,\ \varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)\varphi_n(\varepsilon),\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S, \tag{25}$$

其中系数 $a_n(x)$ 只是 x 的函数. 若

$$f(x,\ \varepsilon)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n(x)\varphi_n(\varepsilon)+R_N(x,\ \varepsilon), \tag{26}$$

$$R_N(x,\varepsilon)=O[\varphi_N(x,\varepsilon)]$$

对所讨论区域内的一切 x 一致成立，则称展开式(25)为函数 $f(x,\varepsilon)$ 的一致有效渐近展开式；否则称(25)为非一致有效渐近展开式。

如果渐近序列 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$ 和函数 $f(\varepsilon)$ 已给定，那末由公式(24)推得，包含一定项数的渐近展开式是唯一确定的．但是同一个函数可以有不同的渐近展开式，它们是按不同的非等价的渐近序列来表示的．例如，当 $\varepsilon\to0$ 时按渐近序列

$$\varphi_n(\varepsilon)=\ln(1+\varepsilon^n),\quad \psi_n(\varepsilon)=\left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right)^{4n-3}$$

展开 $\sin2\varepsilon$，这两个渐近序列是不等价的．按公式(24)我们有

$$\sin2\varepsilon=2\ln(1+\varepsilon)+\ln(1+\varepsilon^2)-2\ln(1+\varepsilon^3)+o(\ln(1+\varepsilon^3)),$$

$$\sin2\varepsilon=6\left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right)-\frac{756}{5}\left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right)^5+o\left[\left(\frac{\varepsilon}{3+2\varepsilon^2}\right)^5\right].$$

构造微分方程解的渐近式时特别要注意这一情况．一般说，对于同一个解可能得到不同的渐近展开式．但是应指出，不同的函数也可能有同一个渐近展开式．例如，

$$\frac{1}{1+\varepsilon}=1-\varepsilon+\varepsilon^2-\cdots\quad(\varepsilon\to0),$$

$$\frac{1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}=1-\varepsilon+\varepsilon^2-\cdots\quad(\varepsilon\to0).$$

这样的函数称为渐近相等，有如下定义：

定义 11 设 $\{\varphi_n(\varepsilon)\}$，$\varepsilon\to a$，$\varepsilon\in S$ 是渐近序列，并且 $f(\varepsilon)$ 和 $g(x)$ 是给定在 S 上的函数．若对一切 n 有

$$f(\varepsilon)-g(\varepsilon)=o(\varphi_n(\varepsilon)),\ \varepsilon\to a,\ \varepsilon\in S,\tag{27}$$

则称函数 $f(\varepsilon)$ 和 $g(\varepsilon)$ 为渐近相等。

因此渐近级数表示的不是一个函数，而是一类函数．对于上面所举的例子我们有

$$\frac{1}{1+\varepsilon}-\frac{1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}=\frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}{1+\varepsilon}=o(\varepsilon^n),\ n=0,1,2,\cdots.$$

结　束　语

本书介绍了 Люстерник-Вишик 边界层校正法的基本内容以及用该方法所讨论的偏微分方程奇异摄动问题，在这些问题中主要有两大类，即退化问题唯一可解的一类和退化问题位于谱上的一类，这两类问题都是数学物理中的重要课题．正如我们在引言中所指出，Люстерник 和 Вишик 在他们的工作中所讨论的问题不只是本书中已经介绍的，还有来源于量子力学和绕射现象的大系数问题，即方程的系数(包括右端函数)在一子区域内，或者在所讨论区域的一个无限窄的夹层内无限增大的问题，还有来源于弹性理论和电力分布(趋肤效应)的边界条件振动很快的问题等等．但由于篇幅所限不能再一一介绍，有兴趣的读者请参看 Люстерник 和 Вишик 的文章[3]．

在 Люстерник 和 Вишик 的工作基础上，六十年代以来出现了一系列重要研究工作，其中关于椭圆、抛物、双曲三种类型方程的奇异摄动问题和特殊类型边界层的研究工作已在正文中陆续介绍过，现将其它方面的工作扼要地介绍一下．

Покровский[73] 曾利用 Люстерник-Вишик 方法研究过含有小参数的伪微分算子问题，这里算子的两次分解可解释为算子符号的展开．Х. Эль-Нади[74] 对一类微分-差分方程 Cauchy 问题构造了解的渐近展开式，这里«步长»起小参数的作用．由此可给出 Bessel-Люстерник 函数的渐近式并应用

到服务论的问题上. 在 Леонтович[75] 和 Гольденвейзер[76] 中也研究过边界条件依赖于小参数的摄动问题. 关于初始跳跃初值问题请参看 Люстерник, Вишик[5], Wasow[14], Касымов[77~80], Коноплицкая[81], Галахов[82], O'Malley[8], Yarmish[83], Cohen[84] 等工作. 关于 Banach 空间中小参数在高阶导数项的微分方程奇异摄动问题的研究工作有 Крейн[85], Треногин[86], Гроза[87], Баглаев[88], Осипов[89] 等, 在这些工作中利用 Люстерник-Вишик 方法构造了解的渐近式并讨论了谱上问题. Джавадов[90], Джавадов, Махмудов[91], Эфендиев[92] 曾研究过狭窄区域内椭圆型方程边值问题的解.

此外, Люстерник 和 Вишик 的研究工作[1~3]系统发表以后, 由他们所创建的边界层校正法在实际问题得到广泛的应用和推广, 其中最有意义的应用有以下三个方面:

1) 超声速粘性气流绕钝头体的流动问题. Марков 和 Чудов 利用 Люстерник-Вишик 方法构造超声速粘性气流绕钝头体流动问题的渐近解. 这一问题是以具有小参数 ε 的 Navier-Stokes 方程组在粘性绕流的边界条件下来描述的, 这里小参数 ε 刻划粘性系数和热传导系数, 边界条件包括物体上的边界条件和在无穷远均匀流的边界条件. 当 $\varepsilon=0$ 时得到相应的无粘性绕流问题. 因此, 从摄动问题到退化问题要失去边界条件, 产生间断. Марков 和 Чудов 构造了任意阶精度的渐近公式.

2) 一系列薄而易弯的板、壳的非线性理论问题. 这里主要有 Срубщик 和 Юдович 的工作. 在 Срубщик 的工作中特别详细地研究了圆形板, 其中也研究了内部边界层现象(板在间断荷载作用下).

3）带着装有粘性流体空腔的刚体运动问题．这些问题在近年来由于火箭和空间技术的发展而具有特别的现实性．因为现代飞行器在其侧舷带有大量的液体燃料，这对飞行器的运动会有重大影响．Моисеев 及其学生系统地引进了 Люстерник-Вишик 方法，求这里所产生的小参数问题的渐近解．一系列这样问题的最一般提法和解决是 Черноусько 的工作．

此外，Люстерник-Вишик 方法可用来研究流体在表面张力作用下的运动、粘性流体毛细波和重力波以及其它问题，本书限于篇幅不再一一列举．至于这些研究工作的参考文献，请参看 Треногин 的综合性文章[86]．

作者由于理论和实践水平所限，书中缺点和错误在所难免，恳请读者提出批评和指正．

参考文献

[1] Вишик, М. И., Люстерник, Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для Линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН 12:5(77), 1957, 3～122.

[2] Вишик, М. И., Люстерник, Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I, УМН 15:3(93) (1960), 3～80.

[3] Вишик, М. И., Люстерник, Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями, УМН 15: 4(94) (1960), 27～95.

[4] Вишик, М. И., Люстерник, Л. А. Об асимптотике решения краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений, ДАН 121:5 (1958), 778～781.

[5] Вишик, М. И., Люстерник, Л. А. О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, ДАН 132: 6(1960), 1242～1245.

[6] Prandtl, L. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandl. d. III. Intern. Math. Kongr. Heidelberg, 1904.

[7] Friedrichs, K. Asymptotic phenomena in mathematical physics, Bull. Amer. Math. Soc. 61, 3(1955), 485～504.

[8] O'Malley, R. E. Jr. Introduction to singular perturbations, Academic Press, New York and London, 1974.

[9] Van Dyke, M. «Perturbation methods in fluid mechanics», Parabotic Press, Standford, 1975.

[10] Eckhaus, W. Matched asymptotic expansions and singular perturbations. North Holland Publ., Amsterdam, 1973.

[11] Nayfeh, A. H. «Perturbation Methods», Wiley, New York, 1973.

[12] Бражовская, И. Ю., Чудов, Л. А. О двух методах построения высших

приближений по малому параметру вязкости, Сб. ВЦ МГУ, вып. 7(1967).

[13] 钱伟长, Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very deflection, 清华大学理科报告第五卷第一期, 1～24 页, 1948.

[14] Wasow, W. Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Wiley (Interscience), New York, 1965.

[15] Васильева, А. Б., Бутузов, В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно Возмущенных уравнений, М., «Наука», 1973.

[16] Garding, L. Dirichlet's problems for linear elliptic partial differential equations, Math. Scandinavica 1 (1953), 55～72.

[17] Courant, R. Partial differential equations, 1962.

[18] Robinson, A. B. Wind driven ocean circulation. Blaisdall Publ. Co. 1963.

[19] Shercliff, Magnetohydrodynamic pipe flow. J. Flaid Mech. 13 (1962).

[20] Wasow, W. Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta u+\lambda\frac{\partial}{\partial x}u=\lambda f(x, y)$, Duke Journ. 11(1944), 405～415.

[21] Levinson, N. The first boundary value problem for $\varepsilon\Delta u+A(x, y)u_x+B(x, y)u_y+C(x, y)u=D(x, y)$ for small ε, Ann. of Math. 51, 2(1950), 428.

[22] Eckhaus, W., de Jaeger, E. M. Asymptotic solutions of singular perturbation problems for linear differential equations of elliptic type, Arch. Rational Mech. Anal. 23 (1966), 26～86.

[23] Bui An Ton, Elliptic boundary problems with a small parameter, J. Math. Anal. and Appl. 14:2(1966), 341～368.

[24] Frankena, I. F. A uniform asymptotic expansion of the solution of a linear elliptic singular perturbation problem, Arch. Rat. Mech. Anal. 31:3(1968), 185～198.

[25] Вишик, М. И., Ладыженская, О. А. Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, УМН XI, вып. 6 (1956), 41～97.

[26] Гусева, О. В. О краевых задачах для сильно эллиптических систем, ДАН 102, №6(1955), 1069～1072.

[27] Nirenberg, L. Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math. 8(1955), 648~674.

[28] Nirenberg, L. Estimates and existeme of solutions of elliptic equations, Comm. Pure Appl. Math. 9(1956), 509~530.

[29] Carrier, G. F. Boundary layer problems in applied mechanics, Adrances in Appl. Mech. 3(1953), 1~19.

[30] Knowles, J. K., Messick, R. E. On a class of singular perturbation problems, J. Math. Anal. Appl. 9, 42~58(1964).

[31] Mauss, J. Etude de la solution asymptotique du probleme de la couche limite parabolique, C. R. Acad. Sci. (Paris)265:25(1967), 838 ~840.

[32] Треногин, В. А. Асимптотика и существование решения задачи коши для дифференциального уравнения дервого порядка с малым параметром в банаховом пространстве, ДАН 152:1(1963), 63~66.

[33] Су Юй-чэн, Асимптотика решений некоторых вырождающегося квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка, ДАН 138:1(1961).

[34] Треногин, В. А. Об асимптотике решений квазилинейных гиперболических уравнений с гиперболическим погранслоем, Труды Мфти вып. 9(1962), 112~127.

[35] Исакова, Е. К. Асимптотика решения дифференциалбного уравнения в частных производных второго порядка параболического типа с малым параметром при старшей производной, ДАН 117:6, 1957.

[36] Friedman, A. Singular perturbations for partial differential equations, Arch. Rational Mech. Anal. 29(1968).

[37] Иванова, Н. А. Фундаментальные решения линейных эллиптических уравнений с малым параметром, Матем. зам. 4:4(1968).

[38] Федотов, И. А. Эллиптические дифференциальные уравнения в R^n, зависящие от параметров, имеющие разрывные на гиперплоскости коэффициенты, Изв. АН Арм. ССР, сер. Матем. 4:1 (1969), 193~194.

[39] Бутузов, В. Ф. Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоуголькой области, Диффер. ур. Т. XI, 6 (1975).

[40] Fife, P. O., Greenlee, W. M. Interior transition layer for elliptic

boundary value problems with a small parameter (УМН 29, No. 4, 1974, 103～130, 俄译文).

[41] Besjes, J. G. Singular perturbation problems for linear elliptic differential operators of arbitrary order, J. Math. Anal. Appl. 49, 24～46, 1975.

[42] Harten, A. V. «Spectral Theory and Asymptotic Differential Equations» Amsterdam e. a. 1974, 181～195.

[43] Howes, F. A. Singularly perturbed semilinear elliptic boundary value problems, Comm. Partial Diff. Equas. 4(1979), 1～39.

[44] 林宗池，在边界和算子摄动相结合的情况下高阶椭圆型方程解的渐近式，福建师大学报(自然科学版)，1979 年第二期.

[45] Comstock, C. Singular perturbations of elliptic equations I, SIAM J. Appl. Math. 20(1971).

[46] 江福汝，高汝熹，高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动，科学通报，第 23 期，1979.

[47] 江福汝，摄动方法在薄板弯曲问题中的某些应用，应用数学和力学，1 卷 1 期，1980.

[48] Kevorkian, J. "The two-variable expansion procedure for the approximate solution of certain nonlinear differential equations" in Lectures in Appl. Math. 7, Space Mathematics (J. B. Rosser, ed.) Part III, pp. 205～275. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1966.

[49] Леликова, Е. Ф. Об асимптотике решения эллиптических уравнений Второго Порядка с малым параметром При старших производных, Дифф. ур. 1976, 12, №10, 1852～1865.

[50] Джавадов, М. Г., Эйюбов, Р. А. Асимптотика по малому параметру решения краевой задачи для эллиптического уравнения, вырождающегося в параболическое, ДАН 1974, 215, №6. 1297～1300.

[51] Джавадов, М. Г. Асимптотика решения смешанной задачи для одного уравнения четвертого порядка с малым Параметром, Вырождающегося в гиперболическое уравнение второго порядка, ДАН Т. 144, №2(1962).

[52] Треногин, В. А. Об асимптотике решения почти линейных параболических уравнений с параболическим погранслоем, УМН Т. 16, вып. 1(97), 163～170, 1961.

[53] Zlamal, M. The parabolic equation as a limiting case of a certain elliptic equation, Ann. Math. pure Appl. 57 (1962), 141~150.

[54] Zlamal, M. The parabolic equations as a limiting case of hyperbolic and elliptic equations. Diff. Equas. and Their Appl. (proceeding of the praque emference, 1962), Academic Press, New York, 1963.

[55] Holland, C. L. Singular perturbations in the first boundary value problems for parabolic equations, SIAM J. Math. Anal. 1977, 8, No. 2, 368~374.

[56] Besjes, J. G. Singular perturbation problems for linear parabolic differential operators, J. Math. Anal. Appl. 1974, 48, No. 2, 594~609.

[57] Bobisad, L. E. The second initial-boundary value problem for a linear parabolic equation with a small parameter, Mich. Math. J. 1969, 15, No. 4, 495~504.

[58] 苏煜城，二阶拟线性双曲型方程奇异摄动柯西问题的渐近解，高等学校计算数学学报创刊号，1979.

[59] 苏煜城，二阶拟线性双曲型方程奇异摄动混合问题的渐近解，南京大学学报(自然科学版)2, 1980.

[60] Джавадов, М. Г. Задача коши для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных, Изв. АН, Аз. ССР, № 6, 1963.

[61] Джавадов, М. Г. Смешанная задача для гиперболического уравнения с малым параметром при старших производных, DAH T. 152, №4, 1963.

[62] Zlamal, M. О смешанной задаче для одного гиперболического уравнения с малым параметром, Чехосл. Мат. Ж. 1959, 9, №2 (218~242).

[63] Comstork, C. Singular perturbations of the wave equation, Appl. Anal. 1975, 5, No. 2, 117~123.

[64] Geel, R., de Jager, E. M. Hyperbolic singular perturbation of nonlinear second order differential equations, North-Holland Math. Studies 31 (Diff. equas. and Appl.) 1977, 75~83.

[65] Genet, J., Madaune, M. Singular perturbation for a class of a nonlinear hyperbolic-hyperbolic problems, J. Math. Anal. Appl. 64, No. 1, 1~24 (1978).

[66] Вишик, М. И. Об устойчивости решений краевых задач для эллипти-

ческих дифференциальных уравнений (Относительно изменения коэффициентов и правых чаотей), ДАН 81, №5(1951).

[67] Вишик, М. И. О краевых задачах для систем дифференциальных уравнений и об устойчивости их решений, ДАН 81, №4(1952).

[68] Кошелев, А. И. Об ограниченности в $\mathscr{L}_p$ производных решений эллиптических дифференциальных уравнений, Матем. Сб. 38, 3(1956), 359~372.

[69] Кошелев, А. И. Априорные оценки в $\mathscr{L}_p$ и обобщенные решения эллиптических уравнений и систем, УМН XIII, 4(1958), 29~88.

[70] Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.

[71] Слободенский, Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их Приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений В частных производных, Учен. зап. ЛГУ 197(1958),54~112.

[72] Erdélyi, A. Asymptotic expansions, DOVER Publ., INC.

[73] Покровкий, А. Д. Асимптотика решений некоторых классов уравнений в свертках, докл. Научн-техн. конф. МЭИ(1967), 155~185.

[74] Х. Эль-Нади, Асимптотика решений некоторых дифференциально-разностных уравнений и ее приложения, ЖВМ и МФ 9:4(1969).

[75] Леонтович, Н. М. Асимптотическое разложение решений краевых задач для уравнений в частных производных, DAH 131(1960).

[76] Гольденвейзер, А. Л. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от параметра, ПММ 22:5(1958), 657~672.

[77] Касымов, К. А. Асимптотическое разложение решений задачи коши с начальным скачком для нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром, Изв. АН Каз. ССР, №3(1963), 66~96.

[78] Касымов, К. А. Асимптотика решения задачи с начальным скачком для нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старшей производной, Изв. АН Каз. ССР, №5 (1968), 69~72.

[79] Касымов, К. А. Асимптотика решения задачи с начальным скачком для гиперболических уравнений второго порядка, содержащих Малый параметр, ДАН 1970, 195, №1, 28~31.

[80] Касымов, К. А. Асимптотика решения задачи с начальными скачками

для систем дифференциальных уравнений гиперболического типа с *малым параметром при производной*, ДАН 1971, 196, №2, 274～277.

[81] Коноплицая, D. M. Об асимптотическом решении задачи коши с начальным скачком для Неавтоношной систем Ду с Малым параметром при производной, ДАН УССР, А, №8(1967), 677～682.

[82] Галахов, М. А. Решения дифференциальных уравнений с малым параметром, имеющие в пределе разрыв, ЖВМ и МФ9:1(1959).

[83] Yarmish, J. Aspects of the numerical and theorical treatment of singular perturbations, doctoral Dissertation, New York Dnir., New York(1972).

[84] Cohen, D. S. Singular perturbations of nonlinear two-point boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 43, 151～160, 1973.

[85] Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., «Наука», 1967.

[86] Треногин, В. А. Развитие и приложения асимптотического метода люстерника-вишика, УМН XXV, вып. 4(154), 1970.

[87] Гроза, Л. А. Асимптотические решения некоторых линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространотве с малым параметром при старших производных, Дифф. ур. 1976, 12, №7, 1174～1186.

[88] Баглаев, Ю. П. Квазилинейные уравнения с малым параметром при производной и не возмущенным оператором наспектре в банаховом Пространстве, Дифф. ур. 1978, 14, №6, 963～973.

[89] Осипов, В. П. Асимптотическое интегрирование и построение пограничного слоя для уравнений в банаховом проотранстве, Лит. Матем. сб. 8:3(1968), 43～45.

[90] Джавадов, М. Г. Асимптотика решения краевой задачи для Эллиптических уравнений второго порядка в тонких областях, Дифф. ур. 4:10, 1968.

[91] Джавадов, М. Г., Махмудов, М. Д. Асимптотика по малому параметру решения краевой задачи для Эллиптического уравнения в тонких областях, ДАНСССР 1976, 227, №4(788～791).

[92] Эфендиев, Р. С. Асимптотика решения по малому параметру краевой задачи для эллиптических уравнений $2m$-го порядка в тонких областях,

ДАН Ав ССР, 1970, 26, №6, 9~14.

[93] Линь-Цзун-Чи, Возмущение решений и возмущение собственных значений и собственных функций эллиптических уравнений второго порядка при возмущении границы, ДАН 157:4(1964).

[General Information]
书名=奇异摄动中的边界层校正法
作者=苏煜城
页数=256
SS号=10347147
DX号=
出版日期=1983年05月第1版
出版社=上海科学技术出版社